(1) [5] $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

A sajátértékek valósak, mert $\underline{\underline{A}}$ két blokkra bontható: emiatt a 3 sajátértéke. A másik 2×2-es blokk: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ szimmetrikus ⇒ a szár valósak. (2)

Másrészt a 2×2-es blokkra a Gersgorin-tétel miatt a szár beleesnek a 3 kp 1 sugarú körbe az 1 kp-u 1 sugarú kör uniójába. (1)
De mivel valósak is, így beleesnek a $[2,4] \cup [0,2]$ intervallumba, azaz a $[0,4]$-be. (1) Mivel a harmadik szár 3, így ez lesz a megfelelő 4 hosszú intervallum. (1)

(2) [7] $f(x) = 3x^2 - 4x - 2 - \operatorname{atan}(x)$.

Mivel $f(1) = 3 - 4 - 2 - \overbrace{\operatorname{atan} 1}^{>0} < 0$ és $f(2) = \overbrace{12 - 8 - 2}^{2} - \overbrace{\operatorname{atan} 2}^{<\frac{\pi}{2}<2} > 0$,
így a Bolzano-tétel miatt van legalább 1 gyök $[1,2]$-n. (1)
Másrészt $f'(x) = \overbrace{6x}^{\geq 6} - 4 \; (1) - \overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{<1} > 0$ az $[1,2]$, így $f(x)$ szig. mon. nő itt, azaz legfeljebb 1 gyöke lehet. (1)
⇒ pontosan 1 gyöke van $[1,2]$-n.

A Newton-iterációról tudjuk, hogy konvergens, ha $f'(x)$-nek nincs gyöke $[x_0, x^*]$-on és $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, (1) ezért
$f''(x) = 6 + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ (1), így olyan pontból indítsuk, ahol $f(x_0) > 0$ pl. 2.

$$x_0 = 2 \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2 - \operatorname{atan} 2}{8 - \frac{1}{5}} \approx 1.8855\ldots \quad (1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.8855 - \frac{3 \cdot 1.8855^2 - 4 \cdot 1.8855 - 2 - \operatorname{atan} 1.8855}{6 \cdot 1.8855 - 4 - 1/(1+1.8855^2)} \approx 1.86196\ldots \quad (1)$$

(3) [6] $x_0 = 1$ $f_0 = 0$ $df_0 = 2$ $x_1 = 2$ $f_1 = 2$ $df_1 = 2$ $x_2 = 3$ $f_3 = 0$ $df_3 = 2$

Newton-féle előállítással! (3)

		c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	0	2					
1	0	2	0				
2	2	2	0	0			
2	2	2	-4	-2	-1		
3	0	-2	4	8	5	3	
3	0	2	4	8			

$$P_5(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^2(x - x_1) + c_4(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + c_5(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2) =$$
(1)
$$2(x-1) - (x-1)^2(x-2)^2 + 3(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$$
(2)

(4) [6] $f'(x) \approx \dfrac{f(x+2h) + 3f(x) - 4f(x-h)}{6h}$

A közelítés rendjéhez:

$$1/\; f(x+2h) = f(x) + 2h f'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{8h^3}{6} f'''(x) + \underline{\underline{O}}(h^4) \quad (1)$$
$$-4/\; f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{-h^3}{6} f'''(x) + \underline{\underline{O}}(h^4) \quad (1)$$
$$3/\; f(x)$$

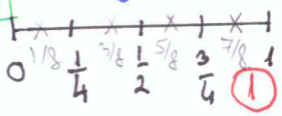
$$\text{számláló} = 0 + 6h f'(x) + 0 + 2h^3 f'''(x) + \underline{\underline{O}}(h^4)$$

Azaz a séma: $\dfrac{f(x+2h) + 3f(x) - 4f(x-h)}{6h} = f'(x) + \underline{\underline{O}}(h^2)$ (1) (1) így <u>másodrendű</u> ha $\underline{f(x) \in C^3}$

Ez alapján $f(x) = 3x + x^3$ -re $h = 0.2$ esetén (1)

$$f'(0) \approx \frac{f(0+2\cdot 0.2) + 3f(0) - 4f(0-0.2)}{1.2} = \frac{3\cdot 0.4 + 0.4^3 - 4(-0.6 - 0.2^3)}{1.2} = 3.08 \quad (1)$$

(5) $\boxed{8}$ $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$



(1)

$$I_4 = \frac{1}{4}\left(f\left(\tfrac{1}{8}\right) + f\left(\tfrac{3}{8}\right) + f\left(\tfrac{5}{8}\right) + f\left(\tfrac{7}{8}\right)\right) (1) =$$

$$= 0.25\left(\exp\left(-\tfrac{1}{64}\right) + \exp\left(-\tfrac{9}{64}\right) + \exp\left(-\tfrac{25}{64}\right) + \exp\left(-\tfrac{49}{64}\right)\right)$$

$$\approx 0.748747131 \quad (1) \qquad \text{Hiba} \le \frac{(b-a)h^2 M_2^*}{24} = \frac{1\cdot 0.25^2 \cdot \frac{2}{e}}{24} = 1.92\cdot 10^{-3} \quad (1)$$

$I = [0.7487, 0.7506]$ (1) (1)

A Romberg-módszerhez mivel az eltérőformula másodrendű, ezért a $\frac{4I_8 - I_4}{3}$ (1) képletet használjuk, behelyettesítve: $\frac{4I_8 - I_4}{3} \approx 0.746822394$ (1)

---

* M_2 meghatározása

$$f(x) = e^{-x^2}$$
$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$
$$f''(x) = -2e^{-2x} + 4x^2 e^{-x^2} = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$$
$$f'''(x) = 8x e^{-x^2} + (4x^2-2)(-2x)\, e^{-x^2} = 0$$
$$2x(4 - 4x^2 + 2) = 0$$
$$x(3 - 2x^2) = 0$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}} \qquad x_3 = 0 \Rightarrow$$

$f'''(x) \ge 0$ $[0,1]$-en $\Rightarrow$ $f''(x)$ mon nő $[0,1]$-en

$$\Rightarrow M_2 = f''(1) = (4-2)e^{-1} = \frac{2}{e} \quad (1)$$

---

(6) $\boxed{8}$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ez alapján: (1) $k_1 = f(x_i, y_i)$

(1) $k_2 = f(x_i + h,\ y_i + h\underbrace{f(x_i, y_i)}_{k_1})$

(1) $y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right)$

lesz a képlete.

$y'(x) = 1 - 15y(x)$ $\quad h = 0.5$-el $\quad y(1) \approx y_2$, ír ki két lépést kell tennünk (1)

$y(0) = 0$

y_1-hez $\quad k_1 = 1 - 15y_0 = 1$

(2) $k_2 = 1 - 15\cdot\frac{1}{2} = -\frac{13}{2}$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4}\right) = \frac{-11}{8} = -1.375$$

y_2-hez: $k_1 = 1 - 15y_1 = 21.625 = \frac{173}{8}$

(2) $k_2 = 1 - 15\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{173}{8} + \frac{-11}{8}\right) = \frac{-2249}{16} = -140.5625$

$$y_2 = -\frac{11}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{173}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{-2249}{16}\right) = -31.109375 = \frac{-1991}{64}$$