2017 december 7.
Munkaidő: 90 perc

MÁSODIK ZÁRTHELYI

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód: | | | | | | |

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

1. (5 pont) Igazoljuk, hogy az A mátrix sajátértékei mind valósak, és adjunk meg egy olyan legfeljebb 4 hosszú intervallumot amelyből a mátrix sajátértékei kikerülhetnek!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (3+4 pont) Legyen $f(x) = 3x^2 - 4x - 2 - \arctan(x)$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$-nek csak egy gyöke van az $[1, 2]$-n. Adjunk becslés a gyökre úgy, hogy elvégzünk két lépést a Newton-iterációval alkalmas kezdőpontból indítva!

3. (6 pont) Határozzuk meg az $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$ pontokon átmenő legalacsonyabb fokú olyan $q(x)$ polinomot, melynek deriváltja mindhárom pontban 2.

4. (4+2 pont) Az $f'(x)$ közelítésére az

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + 2h) + 3f(x) - 4f(x - h)}{6h}$$

numerikus formulát használjuk. Mennyi lesz a közelítés rendje (mit kell feltennünk f simaságáról ehhez)? Mi lenne ezen közelítés alapján $f(x) = 3x + x^3$ esetén $f'(0)$ a $h = 0.2$-re?

5. (5+3 pont) Az $I = \int_0^1 \exp(-x^2)\mathrm{d}x$ integrál értékére összetett érintő formulát használva 8 ekvidisztans intervallumon 0.7473035787-t kaptunk. Számítsuk ki 4 ekvidisztans intervallumra összetett érintőformulával az integrál közelítő értékét, és adjunk meg egy olyan intervallumot, amelybe az integrál értéke mindenképpen beleesik. Ezután a Romberg-módszert alkalmazva adjunk pontosabb becslést I-re.

6. (3+5 pont) Írjuk fel a Butcher-tábla alapján az alábbi explicit Runge-Kutta módszer (Euler–Heun-módszer) képletét!

$$\left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Tekintsük az $y'(x) = 1 - 15y(x)$, $y(0) = 0$ kezdeti érték feladatot. A Euler–Heun-módszer segítségével $h = 0.5$ lépésközt használva becsüljük meg $y(1)$ értékét!