Inverz feladatok a Schrödinger operátorra II

Sáfár Orsolya
közös munka Horváth Miklóssal

Analízis szeminárium
2016.02.17

A Schrödinger-operátor véges szakaszon

A Schrödinger-operátor definíciója:

$$Ly\left(x\right) = -\frac{d^2y\left(x\right)}{dx^2} + q\left(x\right)\cdot y\left(x\right),$$

amely a $[0,\pi]$-n értelmezett $y\left(x\right)$ függvényekre hat, továbbá $q \in L_1[0,\pi]$, valós.

Tétel

Ha $q \in C \Longrightarrow y \in C^2$, *továbbá ha* $q \in L_1^{loc}\left(0,\pi\right) \Longrightarrow y'$ *lokálisan abszolút folytonos* $\left(0,\pi\right)$*-n, azaz m.m.* $\exists\ y''$ *és* $\int_\alpha^\beta y'' = y'\left(\beta\right) - y'\left(\alpha\right)$.

A spektrum

Tekintsük a következő sajátértékproblémát:

$$Ly = \lambda y$$
$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$
$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$$

Ez definiálja a sajátértékeket, melyekre:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \to \infty$$

Definíció

Ezen sajátértéksorozatot $\sigma(q, \alpha, \beta)$-val jelöljük, ezek alkotják a spektrumot.

A normáló konstansok

Legyen λ rögzített, és tekintsük a

$$-u'' + qu = \lambda u, \qquad (0,\pi)\text{-n}$$

$$u(0) = \sin\alpha$$

$$u'(0) = -\cos\alpha$$

kezdetiértékfeladatot. Ekkor a λ sajátértékhez
(és α peremfeltételhez) tartozó normálókonstanst az alábbi módon definiáljuk:

$$\tau(\lambda,\alpha,q) = \int_0^\pi |u(\lambda,x)|^2 dx$$

Inverz feladat

Az inverz feladat a következő: ha adott a sajátértékek (és esetleg a hozzájuk tartozó normálókonstansok) egy halmaza, akkor abból meghatározható-e a potenciál?

És ha ismerem a potenciált a $(0, \pi)$ egy részén, akkor elég kevesébb információ is?

És ha tudom, hogy a potenciál sima?

Unicitási tételek

Tétel (Levinson 1949)

Legyen $q \in L_1(0,\pi)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$. *Ekkor* $\sigma(q, \alpha_1, \beta)$ *és* $\sigma(q, \alpha_2, \beta)$ *együtt m.m. meghatározzák q-t.*

Kérdés, hogy ez a két spektrum szükséges is?

Tétel (Borg, 1946)

Legyen $q \in L_1(0,\pi)$, $\sin\alpha \neq 0$,
a, $\sin\beta \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma(q, \alpha, \beta) \setminus \{\lambda_0\}$, $\sigma_2 = \sigma(q, 0, \beta)$
b, $\sin\beta = 0$, $\sigma_1 = \sigma(q, \alpha, 0)$, $\sigma_2 = \sigma(q, 0, 0)$.
Ekkor $\sigma_1 \cup \sigma_2$ *meghatározza q-t, de semelyik valódi részhalmaz nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.*

A sajátértékek tulajdonságai

Tétel

a, $0 < \alpha, \beta < \pi$

$$\lambda_n = n^2 + \frac{2}{\pi}(\cot\beta - \cot\alpha) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,\mathrm{dx} + o(1) \qquad n \geq 0,\ n \to \infty$$

b, $\alpha = 0, 0 < \beta < \pi$

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\cot\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,\mathrm{dx} + o(1) \qquad n \geq 0,\ n \to \infty$$

c, $\alpha = 0, \beta = 0$

$$\lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,\mathrm{dx} + o(1) \qquad n \geq 1,\ n \to \infty$$

Egy lehetséges általánosítás

Tétel (Hochstadt-Lieberman, 1978)

Ha $q \in L_1(0,\pi)$ *és* q *ismert* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*-n, akkor* $\sigma(q,\alpha,\beta)$ *m.m. meghatározza* q*-t* $[0,\pi]$*-n.*

Tétel (Simon, Gesztesy 2000)

Ha $q \in L_1(0,\pi)$, $\sin(\alpha) \neq 0$, $\sin(\beta) \neq 0$, q *ismert* $[0, \frac{\pi}{2}]$*-n, és* $q \in C^{2k}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$*, akkor* $\sigma(q,\alpha,\beta)$ $k+1$ *sajátérték kivételével meghatározza* q*-t* $[0,\pi]$*-n.*

Több spektrum

Definíció

Legyen μ_n *egy tetszőleges pozitív elemű sorozat, ekkor* $n(t) := \sum_{|\pm\sqrt{\mu_n}|<t} 1$

Tétel (Horváth M., 2001)

Legyen q *ismert a* $[0, a]$ *szakaszon,* $\lambda_n^{(j)}$*,a* j*-edik spektrumból ismert sajétértékek,* $n_j(t)$ *a számlálófüggvényük. Tegyük fel, hogy* $\sin\beta \neq 0$*, és* $\exists t_0 > 0$*,* $\delta > 0$*, ha* $t \geq t_0$

$$\sum_{j=1}^{N} n_j(t) \geq 4\left(1 - \frac{a}{\pi}\right) t + 2\left(1 - \frac{a}{\pi}\right) + O\left(t^{-\delta}\right)$$

Ekkor az ismert sajátértékek meghatározzák $\tan(\beta)$*-t és* q*-t* $(0, \pi)$*-n m.m.*

Tétel három adattípusra

Definíció

A $\mu_1, \mu_2, \dots \subset \mathbb{R}$, *sorozatra és egy* $S \subset \mathbb{N}$ *részhalmazra definiáljuk az alábbi függvényrendszert:*

$$C(\mu, S) = \{\cos(2\sqrt{\mu_n}x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\cos(2\sqrt{\mu_n}x) : n \in S\}.$$

Tétel

Tegyük fel, hogy $q, \tilde{q} \in L_p(0,\pi)$, $q = \tilde{q}$ *m.m.* $(0,a)$*-n,* $\sin\beta \neq 0$, $\sin\tilde{\beta} \neq 0$, $\sin(\alpha) \neq 0$ *legyen*

$$\Lambda = \left\{\lambda_n, \lambda_n \in \sigma(\alpha_n, \beta, q) \cap \sigma(\alpha_n, \tilde{\beta}, \tilde{q}), n \in \mathbb{N}\right\}$$

nem korlátos, $\lambda_n \neq \lambda_m$, *és* $\tau(\lambda_n, \beta, q) = \tau(\lambda_n, \tilde{\beta}, \tilde{q})$ *egy* $S \subset \mathbb{N}$*-re. Ha* $C(\Lambda, S)$ *zárt* $L_p(0, \pi - a)$*-ban, akkor* $\beta = \tilde{\beta}$ *és* $\tilde{q} = q$ *m.m.* $(0,\pi)$*-n.*

Négy lehetséges adattípus

A célunk, hogy meghatározzuk q-t, négyféle adattípus felhasználásával:

1. sajátértékek egy halmaza, amely akár végtelen sok különböző spektrumból származhat
2. normáló konstansok egy S halmaza, amely ismert sajátértékekhez tartozik
3. maga a potenciál egy részintenvallumon $[0, a] \subset [0, \pi]$
4. a potenciál simasága a egy környezetében

Definíció

A sajátértéksorozat és az ismert normálókonstansok közös számlálófüggvénye:

$$n(t) = \sum_{|\pm\sqrt{\lambda_n}|<t} 1 + \sum_{|\pm\sqrt{\lambda_n}|<t,\tau(\lambda_n,\beta,q)\in S} 1$$

Az exponenciális rendszer és a számlálófüggvény

Négy lehetséges adattípus

Tétel

Tegyük fel, hogy $q = \tilde{q}$ $(0, a)$*-n, és valamely* $\delta > 0$*-ra* $q - \tilde{q} \in W^{k,p}([a, a+\delta))$, $1 \leq p < \infty$, *és* $(q-\tilde{q})^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, 1, \dots k-1$, *és* $\sin\beta \neq 0$, $\sin\tilde{\beta} \neq 0$.
Tegyük fel, hogy $\lambda_n \in \sigma(\alpha_n, \beta, q) \cap \sigma(\alpha_n, \tilde{\beta}, \tilde{q})$, $\lambda_n \not\to -\infty$ *és* $\lambda_n \neq \lambda_m$, *és* $\tau(\lambda_n, \beta, q) = \tau(\lambda_n, \tilde{\beta}, \tilde{q})$ *valamely* $S \subset \mathbb{N}$ *részhalmazra. Ha létezik* $R_i \to \infty$ *sorozat, amelyre*

$$\limsup_{R_i \to \infty} \int_0^{R_i} \frac{n(t)}{t} dt - 4\left(1 - \frac{a}{\pi}\right) R_i + \left(k + \frac{1}{p'}\right) \ln R_i \geq K > -\infty$$

teljesül, akkor $\tan(\beta) = \tan(\tilde{\beta})$ *és* $q = \tilde{q}$ $(0, \pi)$*-n mm.*

Lemma

Legyen $A \in \mathbb{R}^+$, $B \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \dots$ *olyan valós számok, amelyek* ∞*-be tartanak. Ha* $\sqrt{\mu_k} \le Ak + B + \mathbf{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ *elég nagy* k*-tól kezdve, akkor*

$$\int_1^R \frac{n(t)}{t} dt \ge \frac{2}{A} R + \left(1 - 2\frac{B}{A}\right) \ln R + \mathbf{O}(1), \quad R \to \infty$$

Bizonyítás

A számlálófüggvény akkor lesz minimális, ha $\mu_k = Ak + B$, továbbá a $\mathbf{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ tag is elhagyható, így $n(t) = 2\frac{t-B}{A} + r(t)$ alakba írható, ahol $r(t) > 0$, $r(\sqrt{\mu_k}+) = 2$, $r(\sqrt{\mu_k}-) = 0$ és $r(t)$ lineáris $(\sqrt{\mu_k}, \sqrt{\mu_{k+1}})$-n.

$$\int_1^T \frac{n(t)}{t} dt = \int_1^T \frac{2}{A} - \frac{2B}{At} + \frac{r(t)}{t} dt =$$

továbbá $\int_1^T \frac{r(t)}{t} dt = \ln T + \mathbf{O}(1)$, így

$$n(t) \geq \frac{2}{A} T - \frac{2B}{A} \ln T + \ln T + \mathbf{O}(1)$$

Lemma

Legyen $A \in \mathbb{R}^+0$, $B \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ *olyan valós számok, amelyek* ∞*-be tartanak. Ha* $\sqrt{\mu_k} \leq [Ak + B] + \mathbf{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ *nagy* k*-ra akkor*

$$\int_1^R \frac{n(t)}{t} dt \geq \frac{2}{A} R + \left(1 - 2\frac{B}{A} + \frac{2}{A} t_{A,B}\right) \ln R + \mathbf{o}(\ln R), \quad R \to \infty$$

ahol $t_{A,B} = \frac{1}{2}$, *ha* $A \in \mathbb{Q}^*$, *és* $t_{A,B} = \frac{s-1}{2s} + \frac{\{Bs\}}{s}$ *ha* A *olyan racionális szám, amelyre* $A = \frac{r}{s}$, *ahol* $(r, s) = 1$. *A hibatag* $\mathbf{O}(1)$*-re cserélhető, ha* $A \in \mathbb{Q}$.

Feltehetjük, hogy $\sqrt{\mu_k} = [Ak + B]$. Legyen $\sqrt{\mu_k^*} = Ak + B$ és legyen n^* a megfelelő számlálófüggvény. Ekkor

$$\int_1^R \frac{n^*(t)}{t} dt = \frac{2}{A} R + \left(1 - 2\frac{B}{A}\right) \ln R + \mathbf{O}(1).$$

Másrészről ha $NA \leq R < (N+1)A$, akkor

$$\int_1^R \frac{n(t) - n^*(t)}{t}\, dt = \sum_1^N \int_{\sqrt{\mu_k}}^{\sqrt{\mu_k^*}} \frac{2}{t} dt + \mathbf{O}(1)$$

$$= \sum_1^N 2 \ln \frac{\sqrt{\mu_k^*}}{\sqrt{\mu_k}} + \mathbf{O}(1) = \sum_1^N 2 \frac{\sqrt{\mu_k^*} - \sqrt{\mu_k}}{\sqrt{\mu_k}} + \mathbf{O}(1) =$$

$$2 \sum_{k=1}^N \frac{\{Ak + B\}}{Ak} + \mathbf{O}(1).$$

Legyen $\nu_k = \{Ak + B\}$ és $S_k = \nu_1 + \cdots + \nu_k$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\nu_k}{k} = \frac{S_N}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \mathbf{O}(1)$$

Ha $A = \frac{r}{s}$ racionális szám, akkor ν_k s periodikus és a számlálók átlaga egy perióduson:

$$\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\{Ak + B\} = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\{Ak\} + \frac{\{Bs\}}{s} = \frac{s-1}{2s} + \frac{\{Bs\}}{s} = t_{A,B}.$$

Következésképpen $S_k = kt_{A,B} + \mathbf{O}(1)$, így

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\nu_k}{k} = t_{A,B} \ln N + \mathbf{O}(1).$$

Viszont ha A irracionális, akkor ismert, hogy $S_k = \frac{k}{2} + \mathbf{o}(k)$ (Pinner, 1997), így

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\nu_k}{k} = \frac{1}{2}\ln N + \mathbf{o}(\ln N)$$

Látjuk, hogy a $\mathbf{o}(\ln N)$-es hibatag $\mathbf{O}(1)$-re cserélhető, ha A racionális. De mi a helyzet irracionális A-ra?

Ekkor nem igaz a $\mathbf{O}(1)$, erre Sándor Csaba adott egy konstrukciót.

A konstrukciója

Legyen $\frac{p_n}{q_n}$ olyan racionális számokból álló sorozat, melyre $(p_n, q_n) = 1$, és $q_n \to \infty$ és

$$\left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}^{q_{n+1}^2+2}}\right] \subset \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^{q_n^2+2}}\right]$$

Mivel zárt, egymásba skatulyázott intervallumok metszete nem üres, így van a metszetben egy A valós szám. Ez ráadásul biztos, hogy irracionális, ugyanis $A \cdot q_n!$ törtrésze nem lehet 0 semmilyen n-re.

Rögzítsük n-et, ekkor $A = \frac{p}{q} + \beta$, ahol $0 < \beta < \frac{1}{q^{q^2+2}}$, így

$$\sum_{k=1}^{q^{q^2+1}} \frac{\{kA\}}{k} = \sum_{k=1}^{q^{q^2+1}} \frac{\{\frac{kp}{q} + k\beta\}}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{q^{q^2+1}} \frac{\{\frac{kp}{q}\}}{k} + \frac{\{k\beta\}}{k} = \sum_{k=1}^{q^{q^2+1}} \frac{\{\frac{kp}{q}\}}{k} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{q}\right)$$

Továbbá egy q hosszú szakasz hozzzájárulása a teljes összeghez, ha az összes nevezőt k helyett mq-ra cserélem, ahol $mq < k \leq (m+1)q$:

$$\sum_{l=1}^{q} \frac{\{\frac{lp}{q}\}}{mq} = \frac{q-1}{2mq}$$

Összegezzük az összes $1 \leq m \leq q^{q^2}$-re, ekkor

$$\sum_{m=1}^{q^{q^2}} \frac{1}{m} \frac{q-1}{2q} = \frac{q-1}{2q} \ln(q^{q^2}) + \mathrm{hiba}$$

Az elkövetett hiba $\mathbf{O}(1)$, ugyanis

$$\left| \sum_{l=1}^{q} \frac{\left\{\frac{lp}{q}\right\}}{mq} - \frac{\left\{\frac{lp}{q}\right\}}{k} \right| \leq \sum_{l=1}^{q} \frac{1}{mq} - \frac{1}{(m-1)q} = \frac{1}{m(m-1)}$$

Ez az első q-s blokk kivételével jó becslés, és akármeddig összegezve véges. Másrészt az első blokk hozzájárulását úgy becsülöm felül, hogy minden nevezőt 1-nek veszek, így az az összeg legfeljebb $\frac{q-1}{2q} \ln q$ lehet. Így végül a teljes összeg legfeljebb:

$$\frac{q-1}{2q} \ln(n) + \mathbf{O}(1)$$

Lemma

Legyen $\sigma = \sigma(\alpha, \beta; q)$ *és* $S \subset \sigma$. *Tegyük fel, hogy*

$$n_S(t) \geq \gamma n_\sigma(t) + \delta,$$

ha t *elég nagy valamely* $0 < \gamma \leq 1$ *és* $\delta \in \mathbb{R}$*-ra. Ekkor, ha* $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$*:*

$$\int_1^R \frac{2n_S(t^2)}{t} dt \geq 2\gamma R + (1 + 2\delta + 2\gamma t_{1/\gamma, -\delta/\gamma}) \ln R + \mathbf{o}(\ln R) \quad r \to \infty.$$

A $\mathbf{o}(\ln R)$ *tag helyett* $\mathbf{O}(1)$ *írható, ha* $\gamma \in \mathbb{Q}$.

Ha viszont csak $t \in S$ *helyeken igaz az egyenlőtlenség, akkor* δ *helyett* $\delta + \gamma - 1$*-et kell írni.*

Legyen $\sigma = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$ és $S = \{\lambda_{k_0}, \lambda_{k_1}, \dots\}$. Mivel $n_S(t)$ konstans $[\lambda_{k_{i-1}}, \lambda_{k_i})$-n és $n_\sigma(t)$ monoton nő, ezért a feltétel pontosan akkor teljesül minden elég nagy t-re, ha $n_S(t-) \geq \gamma n_\sigma(t-) + \delta$ igaz minden elég nagy $t \in S$-re, ami pontosan akkor igaz, ha $n_S(t) \geq \gamma n_\sigma(t) + \delta - \gamma + 1$ teljesül minden elég nagy $t \in S$-re. Így a második állítás következik az elsőből, és

$$i + 1 = n_S(\lambda_{k_i}) \geq \gamma n_\sigma(\lambda_{k_i}) + \delta - \gamma + 1 = \gamma(k_i + 1) + \delta - \gamma + 1$$

ha i nagy, azaz, $k_i \leq \frac{i-\delta}{\gamma}$, így $k_i \leq \left[\frac{i-\delta}{\gamma}\right]$. Felhasználva a sajátértékek aszimptotikáját $\sqrt{\lambda_k} = k + \mathbf{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ adódik:

$$\sqrt{\lambda_{k_i}} \leq \left[\frac{i-\delta}{\gamma}\right] + \mathbf{O}\left(\frac{1}{i}\right).$$