Diszkrét Sturm–Liouville-operátorok első két sajátértékéről

Markó Zoltán, BME Analízis Tanszék

2016. május 11.

Bevezetés, folytonos probléma

Sajátérték-egyenlet időfüggetlen Schrödinger-operátorra, $V \geq 0$:

$$-y'' + V(x)y = \lambda y, \quad (0, \pi)\text{-n},$$

$y(0) = y(\pi) = 0$ (Dirichlet-peremfeltétel). Ennek sajátértékei:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \to \infty.$$

Kérdés: Mikor minimális $\lambda_2 - \lambda_1$?

$\Gamma_0 := \lambda_2(V \equiv 0) - \lambda_1(V \equiv 0)$. Sok speciális esetben:

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \Gamma_0.$$

Folytonos eredmények

Definíció

V egyvölgyű, ha valamely $0 \leq a \leq \pi$-re V szig. mon. csökken $[0, a]$-n és szig. mon. nő $[a, \pi]$-n.

Tétel (Asbaugh–Benguria[1])

Ha V szimmetrikus ($V(x) = V(\pi) - x$) egyvölgyű potenciál, akkor $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \Gamma_0$.

Tétel (Horváth[2])

Ha V egyvölgyű potenciál, melyre $a = \frac{\pi}{2}$, akkor $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \Gamma_0$.

---

[1] M. S. Asbaugh – R. D. Benguria, *Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials*, Proc. Amer. Math. Soc. volume 105, pp. 419-424, 1989.

[2] M. Horváth, *On the first two eigenvalues of Sturm-Liouville problems*, Proc. Amer. Math. Soc., volume 131, pp. 1215-1224, 2003.

Diszkrét probléma

$d = (d_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $d_k \geq 0$: diszkrét potenciál. A differenciálegyenlet megfelelője:

$$-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1} + d_k u_k = \lambda u_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

a határon: $u_0 = u_{n+1} = 0$ (Dirichlet-peremfeltétel). Azaz:

$$(L + D)u = \lambda u,$$

ahol

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Sajátértékek:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \infty.$$

Diszkrét probléma

Kérdés ismét: $\lambda_2 - \lambda_1$ minimuma (speciális feltételek mellett).

$$\Gamma_0 := \lambda_2(d \equiv 0) - \lambda_1(d \equiv 0) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\right].$$

Egyvölgyű potenciál definíciója: analóg módon a folytonossal.

Tétel (Asbaugh–Benguria[3])

Szimmetrikus, egyvölgyű diszkrét potenciál esetén $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \Gamma_0$.

Jarret–Jordan[4]: konvex potenciál, Neumann-perem $(u_0 = u_1, u_n = u_{n+1})$.

[3] M. S. Asbaugh – R. D. Benguria, *Some eigenvalue inequalities for a class of Jacobi matrices*, Linear Algebra and its Applications, volume 136, pp. 215-234, 1990.

[4] M. Jarret – S. P. Jordan, *The fundamental gap for a class of Schrödinger operators on path and hypercube graphs*, J. Math. Phys., volume 55, 052104, 2014.

Diszkrét probléma

Mi a helyzet a (nem feltétlenül szimmetrikus) egyvölgyű esettel?

Definíció

Legyen $n = 2m$. A $d \in \mathbb{R}^{2m}$, $d_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$ vektort (középen elválasztott) egyvölgyű potenciálnak nevezzük, ha

$$d_k \geq d_{k+1},\ k = 1, \ldots, m-1, \quad d_k \leq d_{k+1},\ k = m+1, \ldots, 2m-1.$$

Tétel

Ha $m \geq 3$, és d egyvölgyű potenciál, akkor az optimális d^0 potenciál a következő alakú:

$$d_k^0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \leq k \leq m, \\ c, & \text{ha } m+1 \leq k \leq 2m, \end{cases}$$

ahol $c \geq 0$.

A sajátvektorok általános tulajdonságai

$(L+D)u_i = \lambda_i u_i$, $i = 1, \dots, n$. Normáltsági feltétel: $\sum_{k=1}^{n}(u_i)_k^2 = 1$, $(u_i)_0 = (u_i)_{n+1} = 0$.

Definíció

Az $(a_i)_i$ valós sorozat a_k eleme általánosított zérus, ha $a_k = 0$ vagy $a_k a_{k+1} < 0$. Első esetben első típusú, második esetben második típusú általánosított zérusról beszélünk.

Ismert[5]: u_i-nek pontosan $i-1$ db általánosított zérusa van, így feltehető:

- $(u_1)_k > 0$, $k = 1, \dots, n$,
- létezik olyan σ index, hogy $(u_2)_\sigma$ általánosított zérusa u_2-nek, és $(u_2)_1 > 0$.

[5] M. S. Asbaugh – R. D. Benguria, *Some eigenvalue inequalities for a class of Jacobi matrices*, Linear Algebra and its Applications, volume 136, pp. 215-234, 1990.

A sajátvektorok általános tulajdonságai

Jelölés: ha $a \leq b \in \mathbb{R}$, akkor $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Lemma

Tegyük fel, hogy $(u_2)_\sigma$ általánosított zérusa u_2-nek. Ekkor

- *létezik $0 \leq \sigma_- \leq \sigma - 1$ és $\sigma + 1 \leq \sigma_+ \leq n + 1$ az első típusnál;*
- *létezik $0 \leq \sigma_- \leq \sigma$ és $\sigma + 1 \leq \sigma_+ \leq n + 1$ a második típusnál,*

hogy

- $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_k^2 > 1$, *ha* $k \in [\![1, \sigma_-]\!] \cup [\![\sigma_+, n]\!]$,
- $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_k^2 \leq 1$, *ha* $k \in [\![\sigma_- + 1, \sigma_+ - 1]\!]$.

Ezen két halmaz egyike sem üres, és $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)_k^2 = 1$ legfeljebb a $k = \sigma_{-1} + 1$ vagy a $k = \sigma_+ - 1$ indexek esetén lehetséges.

A sajátértékek deriválása

Legyen $D = D(t)$, ahol $D(t) := \mathrm{diag}(d_1(t), \ldots, d_n(t))$, $d_i \in C^1(0,1)$, $(T + D(t))u(t) = \lambda(t)u(t)$. Mivel a sajátértékek egyszeresek, igaz a következő:

$$\dot{\lambda}(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{d}_k(t) u_k^2(t),$$

amiből

$$\dot{\Gamma}(t) = \dot{\lambda}_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{d}_k(t) \left[(u_2)_k^2(t) - (u_1)_k^2(t) \right].$$

Az optimális potenciál alakja

Legyen $M > 0$-ra

$$A_M := \{d = (d_k)_{k=1}^{2m} \mid 0 \le d_k \le M,\ d \text{ egyvölgyű}\}.$$

$A_M \subset \mathbb{R}^{2m}$ korlátos és zárt, $d \mapsto \lambda_2(d) - \lambda_1(d)$ folytonos, így létezik minimális d^0 potenciál A_M-ben.

Lemma

Ha $m \ge 3$, $M \ge 4$, akkor

$$d_k^0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \le k \le m, \\ c, & \text{ha } m+1 \le k \le 2m, \end{cases}$$

ahol $c \ge 0$.

Az optimális potenciál alakja

A bizonyítás vázlata.

Az optimális potenciálhoz tartozó mennyiségek: λ_1, λ_2, u_1, u_2, illetve u_2-höz létezik σ, σ_-, és σ_+. Több eset van:

A) $\sigma_- \leq m-1$ és $\sigma_+ \geq m+2$,

B) $m \leq \sigma_-$,

C) $\sigma_+ \leq m+1$.

B), C): kiderül, hogy nem lehetségesek, illetve $\lambda_2 \leq 2$.

A) esetben a bizonyítás: Legyen d^1 potenciál a következő:

$$d^1_k := \begin{cases} d^0_{\sigma_-+1}, & \text{ha } 1 \leq k \leq m; \\ d^0_{\sigma_+-1}, & \text{ha } m+1 \leq k \leq 2m, \end{cases}$$

$d^1 \in A_M$. Mivel d^0 egyvölgyű:

$$d^0_k - d^1_k \begin{cases} \geq 0 & \text{ha } k \in [\![1, \sigma_-]\!] \cup [\![\sigma_+, 2m]\!] \\ = 0 & \text{ha } k \in \{\sigma_- + 1, \sigma_+ - 1\}, \\ \leq 0 & \text{ha } k \in [\![\sigma_- + 2, \sigma_+ - 2]\!]. \end{cases}$$

Az optimális potenciál alakja

Legyen $d_k(t) := t d_k^1 + (1-t) d_k^0$, $t \in [0,1]$, ekkor $d(t) \in A_M$, és $t = 0$-ra az optimális potenciál adódik. Emiatt

$$
\begin{aligned}
0 \le \dot{\Gamma}(t)\Big|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{2m} (d_k^1 - d_k^0)\left[(u_2)_k^2(0) - (u_1)_k^2(0)\right] = \\
&= \sum_{k \in [\![1,\sigma_-]\!] \cup [\![\sigma_+,2m]\!]} \underbrace{(d_k^1 - d_k^0)}_{\le 0} \underbrace{\left[(u_2)_k^2(0) - (u_1)_k^2(0)\right]}_{>0} + \\
&+ \sum_{k \in \{\sigma_- + 1, \sigma_+ - 1\}} \underbrace{(d_k^1 - d_k^0)}_{=0} \left[(u_2)_k^2(0) - (u_1)_k^2(0)\right] + \\
&+ \sum_{k \in [\![\sigma_- + 2, \sigma_+ - 2]\!]} \underbrace{(d_k^1 - d_k^0)}_{\ge 0} \underbrace{\left[(u_2)_k^2(0) - (u_1)_k^2(0)\right]}_{<0} \le 0,
\end{aligned}
$$

de ez csak úgy lehetséges, ha $d_k^1 = d_k^0$. $\square$

Az optimális potenciálhoz tartozó sajátvektorok

Feltehető tehát, hogy

$$d_k^0 := \begin{cases} 0, & \text{if } 1 \le k \le m; \\ c, & \text{if } m+1 \le k \le 2m, \end{cases}$$

Ennek λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora explicit módon számolható: $k = 0, 1, \ldots, m+1$ esetén

$$u_k = C \sin(k\varphi),$$

ahol $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = \frac{2-\lambda}{2}$, illetve $k = m, m+1, \ldots, 2m+1$ esetén

$$u_k = \begin{cases} D\sin((2m+1-k)\phi), & \text{if } c < \lambda \le 2, \\ D(2m+1-k), & \text{if } \lambda = c, \\ D\sinh((2m+1-k)\psi), & \text{if } 0 < \lambda < c, \end{cases}$$

ahol $\cos\phi = \frac{2+c-\lambda}{2}$, $\cosh\psi = \frac{2+c-\lambda}{2}$.

Ekvivalens átfogalmazás

Lemma

λ az optimális potenciálhoz tartózó egyik sajátérték pontosan akkor, ha λ a következő egyenlet megoldása:

$$U_{m-1}\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_{m-1}\left(\frac{2-t}{2}\right)=U_m\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_m\left(\frac{2-t}{2}\right),$$

ahol $U_m$az m. másodfajú Csebisev-polinom.

Bizonyítás részlete.

Ha $\lambda > 0$ egy sajátérték, akkor u_m és u_{m+1} kétféleképpen is számolható. Ha pl. $c < \lambda \leq 2$, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$C\sin(m\varphi) = D\sin((m+1)\phi) \tag{1}$$

$$C\sin((m+1)\varphi) = D\sin(m\phi) \tag{2}$$

Ekvivalens átfogalmazás

u_2 nem triviális megoldása a sajátérték-egyenletnek $\Rightarrow$ (1)-(2) determinánsa $= 0$:

$$\sin(m\varphi)\sin(m\phi) = \sin((m+1)\varphi)\sin((m+1)\phi).$$

Felhasználva, hogy $U_{m-1}(\cos\alpha) = \frac{\sin(m\alpha)}{\sin\alpha}$, osztva $\sin\varphi\sin\phi \neq 0$-val:

$$U_{m-1}\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_{m-1}\left(\frac{2-t}{2}\right) = U_m\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_m\left(\frac{2-t}{2}\right).$$

Ha $0 < \lambda < c$, $\lambda = c$, akkor is hasonló számolás, az $U_{m-1}(1) = m$ and $U_{m-1}(\cosh\alpha) = \frac{\sinh(m\alpha)}{\sinh\alpha}$ azonosságok felhasználásával. $\square$

Ekvivalens átfogalmazás

$$U_{m-1}\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_{m-1}\left(\frac{2-t}{2}\right)=U_m\left(\frac{2+c-t}{2}\right)U_m\left(\frac{2-t}{2}\right).$$

Kérdés tehát az egyenlet első két gyökének különbsége.
$U_{m-1}\left(\frac{2-t}{2}\right)$ gyökei: $x_k := 4\sin^2\frac{k\pi}{2m}$, $k=1,\dots,m-1$,
$U_m\left(\frac{2-t}{2}\right)$ gyökei: $y_k := 4\sin^2\frac{k\pi}{2(m+1)}$, $k=1,\dots,m$, és

$$0<y_1<x_1<y_2<\dots<y_k<x_k<y_{k+1}<\dots<x_{m-1}<y_m.$$

Legyenek t_k, $k=1,\dots,2m$ az egyenlet megoldásai növekvő sorrendben.

Ekvivalens átfogalmazás

Lemma

A fenti egyenlet első két gyökére teljesül, hogy

$$0 < t_1 < y_1 < t_2 < y_2,$$

még precízebben:

- *ha* $0 \le c < x_1 - y_1$, *akkor* $0 < t_1 < y_1$, $y_1 + c < t_2 < x_1$,
- *ha* $c = x_1 - y_1$, *akkor* $0 < t_1 < y_1$, $t_2 = x_1$,
- *ha* $x_1 - y_1 < c$, *akkor* $0 < t_1 < y_1$, $x_1 < t_2 < \min\{y_1 + c, y_2\}$.

A bizonyítás vázlata. $h_m(t) := U_m\left(\frac{2-t}{2}\right) U_m\left(\frac{2+c-t}{2}\right) \Rightarrow$ $h_{m-1}(t) = h_m(t)$. h_m gyökei: $s_{m,k}$, $k = 1, \ldots, 2m$. Ekkor $s_{m,1} = y_1$, $s_{m-1,1} = x_1$, és

$$s_{m,2} = \begin{cases} y_1 + c, & \text{ha } c < y_2 - y_1, \\ y_2, & \text{ha } c \ge y_2 - y_1, \end{cases} \quad s_{m-1,2} = \begin{cases} x_1 + c, & \text{ha } c < x_2 - x_1 \\ x_2, & \text{ha } c \ge x_2 - x_1 \end{cases}$$

Ekvivalens átfogalmazás

Ha $0 \leq c < x_1 - y_1$, akkor a két oldalnak nincs közös zérushelye, és az egyenlettel ekvivalens:

$$1 = g_m(t) g_m(t-c),$$

ahol $g_m(t) := \frac{U_{m-1}}{U_m}\left(\frac{2-t}{2}\right)$.

Lemma

A $g_m(t) = \frac{U_{m-1}}{U_m}\left(\frac{2-t}{2}\right)$, $t \in (-\infty, y_2)$ *függvény tulajdonságai:*

1. *szigorúan monoton nő* $(-\infty, y_1) \cup (y_1, y_2)$*-n,*
2. $\lim_{t\to-\infty} g_m(t) = 0$, $\lim_{t\to y_1-0} g_m(t) = \infty$, $\lim_{t\to y_1+0} g_m(t) = -\infty$, $\lim_{t\to y_2-0} g_m(t) = \infty$,
3. $g_m(x_1) = 0$.

Ekvivalens átfogalmazás

Mivel

$$\lim_{t \to y_1 - 0} g_m(t) g_m(t-c) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{t \to -\infty} g_m(t) g_m(t-c) = 0,$$

és g_m, $g_m(.-c) > 0$ $(-\infty, y_1)$-en $\Rightarrow$ egyértelműen létezik $\widetilde{t_1} < y_1$ megoldás, ez adja $0 < t_1 := \widetilde{t_1} < y_1$ gyököt.
$(y_1, y_1 + c)$-n nincs megoldás, mert itt h_m és h_{m-1} ellenkező előjelűek.
$(y_1 + c, x_1)$-en: mivel itt g_m, $g_m(.-c) < 0$ és szigorúan monoton növők, továbbá

$$\lim_{t \to y_1 + c + 0} g_m(t) g_m(t-c) = \infty \quad \text{és} \quad g_m(x_1) g_m(x_1 - c) = 0,$$

létezik $y_1 + c < \widetilde{t_2} < x_1$ megoldás, ez adja $t_2 := \widetilde{t_2}$-t.

Az $x_1 - y_1 \leq c$ esetek hasonlóak. $\square$

Az optimális potenciál

Legyen $f_m : (-\infty, y_2) \to \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$f_m(t) := \begin{cases} -\log|g_m(t)|, & \text{ha } 0 \le c \le x_1 - y_1, \\ -\log(g_m(t)), & \text{ha } x_1 - y_1 < c, \end{cases}$$

és legyen z_1 és z_2 az f_m zérushelyei $(0, y_1)$-en illetve (x_1, y_2)-n. Ekkor

$$z_1 = 2 - 2\cos\frac{\pi}{2m+1} \quad \text{és} \quad z_2 = 2 - 2\cos\frac{3\pi}{2m+1}.$$

Lemma

Az $f_m(t) = -\log|g_m(t)|$, $t \in (-\infty, y_2) \setminus \{y_1, x_1\}$ függvény tulajdonságai:

1. *szigorúan monoton csökken $(-\infty, y_1) \cup (x_1, y_2)$-n,*
2. *szigorúan monoton nő (y_1, x_1)-n,*
3. $\lim_{t\to y_1} f_m(t) = -\infty$, $\lim_{t\to x_1} f_m(t) = \infty$, $\lim_{t\to y_2-0} f_m(t) = -\infty$.
4. *f_m konkáv $(-\infty, y_1)$-en.*

Az optimális potenciál

A fenti egyenlettel ekvivalens:

$$f_m(t) + f_m(t-c) = 0,$$

esetleg abban az értelemben, hogy

$$\lim_{t\to x_1} f_m(t) = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{t\to x_1} f_m(t-c) = -\infty$$

($c = x_1 - y_1$ eset).
Ennek az egyenletnek pontosan két gyöke van: $0 < t_1 < y_1$ és $y_1 < t_2 < y_2$.

Lemma

$c \mapsto t_i(c)$, $i = 1, 2$ szigorúan monoton növő függvény $[0, \infty)$-en.

Bizonyítás: Horváth Miklós[6] nyomán. □

[6] M. Horváth, *On the first two eigenvalues of Sturm-Liouville problems*, Proc. Amer. Math. Soc., volume 131, pp. 1215-1224, 2003.

Az optimális potenciál

Tétel

Ha $0 \leq c \leq x_1 - y_1$*, akkor* $\Gamma(d^0) \geq \Gamma_0$*.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy

$$\frac{\mathrm{d}t_1(c)}{\mathrm{d}c} < \frac{1}{2} < \frac{\mathrm{d}t_2(c)}{\mathrm{d}c},$$

ha $c \in (0, x_1 - y_1)$. Deriválva az $f_m(t) + f_m(t-c) = 0$ egyenletet:

$$\frac{1}{t_i'(c)} = \frac{f_m'(t_i(c))}{f_m'(t_i(c) - c)} + 1, \quad i = 1, 2,$$

így elegendő belátni:

$$\frac{f_m'(t_2(c))}{f_m'(t_2(c) - c)} < 1 < \frac{f_m'(t_1(c))}{f_m'(t_1(c) - c)}.$$

Az optimális potenciál

Mivel most $0 < t_1(c) < y_1$, $y_1 + c < t_2(c) < x_1$, ezért $f_m'(t_1(c) - c) < 0$ és $f_m'(t_2(c) - c) > 0$.
Elegendő megmutatni, hogy

$$f_m'(t_1(c)) < f_m'(t_1(c) - c)$$

és

$$f_m'(t_2(c)) < f_m'(t_2(c) - c).$$

Az első egyenlőtlenség: f_m konkavitása $(-\infty, y_1)$-en.
A második egyenlőtlenség igazolása: $t_2(c), t_2(c) - c \in (y_1, x_1)$, itt $f_m(t) = -\log\left(-\frac{U_{m-1}}{U_m}\left(\frac{2-t}{2}\right)\right)$.

$f_m'(t) = -\frac{1}{2}k_m'\left(\frac{2-t}{2}\right)$, ahol $k_m(x) := -\log\frac{U_{m-1}}{U_m}(x)$.

Az optimális potenciál

Lemma

Ha $k_m(x) := -\log \frac{U_{m-1}}{U_m}(x)$, *ahol* x *olyan, hogy* $\frac{U_{m-1}}{U_m}(x) > 0$, *akkor*

$$k_m'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(-m\frac{U_m}{U_{m-1}}(x) - (m+1)\frac{U_{m-1}}{U_m}(x) + (2m+1)x\right).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} U_m'(x) &= \frac{(m+1)T_{m+1}(x) - xU_m(x)}{x^2-1}, \\ T_{m+1}(x) &= U_{m+1}(x) - xU_m(x), \\ U_{m+1}(x) &= 2xU_m(x) - U_{m-1}(x), \end{aligned}$$

ahol T_m az m. elsőfajú Csebisev-polinom.

Az optimális potenciál

$$\frac{U_m'}{U_m}(x) = -\frac{m+1}{x^2-1}\frac{U_{m-1}}{U_m}(x) + \frac{mx}{x^2-1},$$

így

$$k_m'(x) = -\frac{U_{m-1}'}{U_{m-1}}(x) + \frac{U_m'}{U_m}(x) =$$
$$= \frac{m}{x^2-1}\frac{U_{m-2}}{U_{m-1}}(x) - \frac{(m-1)x}{x^2-1} - \frac{m+1}{x^2-1}\frac{U_{m-1}}{U_m}(x) + \frac{mx}{x^2-1}.$$

Mivel $U_m(x) = 2xU_{m-1}(x) - U_{m-2}(x)$,

$$k_m'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(-m\frac{U_m}{U_{m-1}}(x) - (m+1)\frac{U_{m-1}}{U_m}(x) + (2m+1)x\right)$$

adódik. □

Az optimális potenciál

Egyszerűség kedvéért: $t_2 := t_2(c)$, akkor az előző lemma szerint

$$2\left(\left(\frac{2-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f_m'(t_2) =$$
$$= m\frac{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)} + (m+1)\frac{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)} - (2m+1)\frac{2-t_2}{2},$$

illetve

$$2\left(\left(\frac{2+c-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f_m'(t_2-c) =$$
$$= m\frac{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)} + (m+1)\frac{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)} - (2m+1)\frac{2+c-t_2}{2}$$

felhasználva, hogy $g_m(t_2)g_m(t_2-c) = 1$.

Az optimális potenciál

$f'_m(t_2 - c) > 0$, így

$$\left(\left(\frac{2+c-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f'_m(t_2 - c) > \left(\left(\frac{2-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f'_m(t_2 - c).$$

Emiatt elegendő belátni, hogy

$$2\left(\left(\frac{2-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f'_m(t_2) > 2\left(\left(\frac{2+c-t_2}{2}\right)^2 - 1\right) f'_m(t_2 - c),$$

mivel $0 < t_2 \leq 2$, így $\left(\frac{2-t_2}{2}\right)^2 - 1 < 0$.

Az optimális potenciál

$$2\left(\left(\frac{2-t_2}{2}\right)^2-1\right)f_m'(t_2)-2\left(\left(\frac{2+c-t_2}{2}\right)^2-1\right)f_m'(t_2-c)=$$
$$=-\frac{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}+\frac{U_{m-1}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}{U_m\left(\frac{2-t_2}{2}\right)}+(2m+1)\frac{c}{2}.$$

$f_m(t_2)>0$, ha $0<c<x_1-y_1$, így

$$-\frac{U_m}{U_{m-1}}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)>1 \quad \text{és} \quad \frac{U_{m-1}}{U_m}\left(\frac{2-t_2}{2}\right)>-1,$$

amiből az állítás adódik. $\square$

Az optimális potenciál

Megjegyzés

Ha $c \geq z_2 - z_1$, akkor mivel $t_2(c)$ szigorúan monoton nő, és $t_1(c) < y_1$:

$$t_2(c) - t_1(c) \geq t_2(z_2 - z_1) - y_1 = z_2 - y_1 > \Gamma_0,$$

amennyiben

$$\cos\frac{\pi}{m+1} - \cos\frac{3\pi}{2m+1} > \cos\frac{\pi}{2m+1} - \cos\frac{2\pi}{2m+1}.$$

Összefoglalás

Igazoltuk, hogy $m \geq 3$, egyvölgyű potenciál esetén az optimális potenciál $d^0 = (d_k^0)_k$ alakja:

$$d_k^0 := \begin{cases} 0, & \text{if } 1 \leq k \leq m; \\ c, & \text{if } m+1 \leq k \leq 2m, \end{cases}$$

$c \geq 0$. Ha $0 \leq c \leq x_1 - y_1$, akkor szükségképpen $c = 0$.

A közeljövő kérdései: $x_1 - y_1 < c$ esetén kellene: $\Gamma(d^0) > \Gamma_0$. Továbbá:

- $m = 2$ eset ($m = 1$-re igaz);
- nem középen elválasztott egyvölgyű eset;
- $n = 2m + 1$ eset értelmezése, hasonló tétel bizonyítása.

Köszönöm a figyelmet!