Megőrzési problémák kvantumállapotokon és pozitív definit operátorokon

Gaál Marcell

BME Analízis Szeminárium,
2016. március 9.
16:03

M. Gaál and L. Molnár.
Transformations on density operators and on positive definite operators preserving the quantum Rényi divergence.

M. Gaál.
Maps on positive definite operators and on density operators preserving Dragomir's new quantum version of f-divergence.

Megőrzési problémák

- Adott egy S matematikai struktúra és $X(A, B)$ egy mennyiség vagy reláció két $A, B \in S$ elem között.
- Hogyan írhatóak le azok a $\phi\colon S \to S$ leképezések, amelyekre

$$X(\phi(A), \phi(B)) = X(A, B) \qquad (A, B \in S).$$

Megőrzési problémák

- Adott egy S matematikai struktúra és $X(A, B)$ egy mennyiség vagy reláció két $A, B \in S$ elem között.
- Hogyan írhatóak le azok a $\phi\colon S \to S$ leképezések, amelyekre

$$X(\phi(A), \phi(B)) = X(A, B) \qquad (A, B \in S).$$

- A ϕ leképezésre gyakran további feltételek: bijektivitás, folytonosság, illetve ha S vektortér, akkor linearitás.

Megőrzési problémák

- Adott egy S matematikai struktúra és $X(A, B)$ egy mennyiség vagy reláció két $A, B \in S$ elem között.
- Hogyan írhatóak le azok a $\phi \colon S \to S$ leképezések, amelyekre

$$X(\phi(A), \phi(B)) = X(A, B) \qquad (A, B \in S).$$

- A ϕ leképezésre gyakran további feltételek: bijektivitás, folytonosság, illetve ha S vektortér, akkor linearitás.
- Kizárólag **nemlineáris** megőrzési problémákkal foglalkozunk, azaz:
  - "a priori" nem teszünk fel semmilyen linearitási feltételt
  - de az esetek nagy részében az eredmények azt mutatják, hogy a kérdéses transzformációk automatikusan lineárisak

Megőrzési problémák

Kvantum-struktúrákon

- A megőrzési problémák közül a legtöbb mátrixokkal, vagy végtelen dimenziós korlátos lineáris operátorokkal kapcsolatos.

Megőrzési problémák

Kvantum-struktúrákon

- A megőrzési problémák közül a legtöbb mátrixokkal, vagy végtelen dimenziós korlátos lineáris operátorokkal kapcsolatos.
- A kvantummechanika Neumann Jánostól származó matematikai leírásában:
  - állapotok $\sim$ sűrűségi operátorok: $\mathcal{S}(\mathcal{H})$
  - tiszta állapotok $\sim$ egy rangú (ortogonális) projekciók: $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$
  - megfigyelhető események $\sim$ önadjungált operátorok: $\mathcal{L}(\mathcal{H})^{sa}$

Megőrzési problémák

Kvantum-struktúrákon

- A megőrzési problémák közül a legtöbb mátrixokkal, vagy végtelen dimenziós korlátos lineáris operátorokkal kapcsolatos.
- A kvantummechanika Neumann Jánostól származó matematikai leírásában:
  - állapotok $\sim$ sűrűségi operátorok: $\mathcal{S}(\mathcal{H})$
  - tiszta állapotok $\sim$ egy rangú (ortogonális) projekciók: $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$
  - megfigyelhető események $\sim$ önadjungált operátorok: $\mathcal{L}(\mathcal{H})^{sa}$
- Bizonyos esetekben célszerű a sűrűségi operátorok helyet a pozitív szemidefinit vagy pozitív definit operátorokat vizsgálni: $\mathcal{L}(\mathcal{H})^+$, illetve $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$
- Utóbbi például differenciálható sokaság struktúrával is rendelkezik.

Klasszikus eredmény

Tétel (Wigner J.)

Legyen $\mathcal{H}$ *Hilbert tér és* $\phi\colon \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ *egy leképezés, amelyre*

$$\operatorname{Tr} PQ = \operatorname{Tr} \phi(P)\phi(Q) \qquad (P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})).$$

Ekkor létezik egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, hogy* ϕ *a következő alakú:*

$$\phi(P) = UPU^* \qquad (P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})).$$

Wigner-tétel bizonyításai

- Wigner Jenő bizonyítása (1932) nem volt matematikailag korrekt.

Wigner-tétel bizonyításai

- Wigner Jenő bizonyítása (1932) nem volt matematikailag korrekt.
- Első teljes bizonyítások a '60-as években, de ezek feltételezik a leképezés bijektivitását is.

Wigner-tétel bizonyításai

- Wigner Jenő bizonyítása (1932) nem volt matematikailag korrekt.
- Első teljes bizonyítások a '60-as években, de ezek feltételezik a leképezés bijektivitását is.
- Tisztán algebrai bizonyítás: Molnár Lajos (1996).

Wigner-tétel bizonyításai

- Wigner Jenő bizonyítása (1932) nem volt matematikailag korrekt.
- Első teljes bizonyítások a '60-as években, de ezek feltételezik a leképezés bijektivitását is.
- Tisztán algebrai bizonyítás: Molnár Lajos (1996).
- Alternatív megközelítések: Győry Máté (2004), Gehér György Pál (2014).

Wigner-tétel bizonyításai

- Wigner Jenő bizonyítása (1932) nem volt matematikailag korrekt.
- Első teljes bizonyítások a ’60-as években, de ezek feltételezik a leképezés bijektivitását is.
- Tisztán algebrai bizonyítás: Molnár Lajos (1996).
- Alternatív megközelítések: Győry Máté (2004), Gehér György Pál (2014).
- Általánosítások Banach-terekre, Hilbert-modulusokra.

Relatív entrópia fogalmak

- Umegaki:

$$S(A\|B) = \begin{cases} \operatorname{Tr} A(\log A - \log B), & P_A \leq P_B \\ \infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Rényi relatív entrópia:

$$S_\alpha(A\|B) = \begin{cases} (\alpha - 1)^{-1} \log\left(\operatorname{Tr} A^\alpha B^{1-\alpha}\right), & P_A P_B \neq 0 \quad \wedge \\ & (P_A \leq P_B \vee \alpha < 1) \\ \infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Tsallis:

$$S_{TS}(A\|B) = \frac{1 - \operatorname{Tr} A^q B^{1-q}}{1 - q}$$

Kvantum f-divergencia

- Az eddig bemutatott relatív entrópia típusok mindegyike ún. **kvantum f-divergencia**.
- Definíció pozitív definit B operátor esetén:

$$S_f(A\|B) = \left\langle \sqrt{B}, f(L_A R_{B^{-1}})\sqrt{B} \right\rangle_{\mathrm{HS}}$$

Kvantum f-divergencia

- Az eddig bemutatott relatív entrópia típusok mindegyike ún. **kvantum f-divergencia**.
- Definíció pozitív definit B operátor esetén:

$$S_f(A\|B) = \left\langle \sqrt{B}, f(L_A R_{B^{-1}})\sqrt{B} \right\rangle_{\mathrm{HS}}$$

- Általános esettben:

$$S_f(A\|B) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} S_f(A\|B + \varepsilon I)$$

Kvantum f-divergencia

- Az eddig bemutatott relatív entrópia típusok mindegyike ún. **kvantum f-divergencia**.
- Definíció pozitív definit B operátor esetén:

$$S_f(A\|B) = \left\langle \sqrt{B}, f(L_A R_{B^{-1}})\sqrt{B} \right\rangle_{\mathrm{HS}}$$

- Általános esettben:

$$S_f(A\|B) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} S_f(A\|B + \varepsilon I)$$

- A fenti határérték létezik és

$$S_f(A\|B) = \sum_{a \in \sigma(A)} \left(\sum_{b \in \sigma(B) \setminus \{0\}} bf\left(\frac{a}{b}\right) \operatorname{Tr} P_a Q_b + \gamma a \operatorname{Tr} P_a Q_0 \right),$$

ahol $\gamma = \lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega$.

Egy korábbi eredmény

Tétel (Molnár L., Nagy G. és Szokol P., 2013)

Legyen f szigorúan konvex függvény, melyre $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega$ *létezik vagy végtelen, továbbá $\phi \colon \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ egy leképezés, amelyre*

$$S_f(\phi(A) \| \phi(B)) = S_f(A \| B) \qquad (A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

Ekkor létezik egy $U \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitér vagy antiunitér operátor, melyre

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

További entrópia fogalmak

- A kvantum Rényi-divergencia (avagy "sandwiched Rényi-entropy"):

$$D'_\alpha(A\|B) = \begin{cases} (\operatorname{Tr} A)^{-1} \operatorname{Tr}\left(B^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} A B^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\right)^{\alpha}, & P_A P_B \neq 0 \quad \wedge \\ & (P_A \leq P_B \vee \alpha < 1) \\ \infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- $D_\alpha(A\|B) = (\alpha - 1)^{-1} \log\left(D'_\alpha(A\|B)\right)$

További entrópia fogalmak

- A kvantum Rényi-divergencia (avagy "sandwiched Rényi-entropy"):

$$D'_\alpha(A\|B) = \begin{cases} (\operatorname{Tr} A)^{-1} \operatorname{Tr}\left(B^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} A B^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\right)^{\alpha}, & P_A P_B \neq 0 \quad \wedge \\ & (P_A \leq P_B \vee \alpha < 1) \\ \infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- $D_\alpha(A\|B) = (\alpha - 1)^{-1} \log\left(D'_\alpha(A\|B)\right))$
- Dragomir "új" kvantum f-divergenciája:

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} Bf\left(B^{-1/2} A B^{-1/2}\right)$$

Példák

- Ha f a standard entrópia függvény, azaz

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} B^{1/2} A B^{-1/2} \log\left(B^{-1/2} A B^{-1/2}\right).$$

Példák

- Ha f a standard entrópia függvény, azaz

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} B^{1/2} A B^{-1/2} \log\left(B^{-1/2} A B^{-1/2}\right).$$

- Ha $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$, akkor

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} A^2 B^{-1} - 1,$$

ami χ^2-távolság néven ismert.

Példák

- Ha f a standard entrópia függvény, azaz

$$f(x) = \begin{cases} x\log x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} B^{1/2}AB^{-1/2}\log\left(B^{-1/2}AB^{-1/2}\right).$$

- Ha $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2-1$, akkor

$$D_f(A\|B) = \operatorname{Tr} A^2B^{-1} - 1,$$

ami χ^2-távolság néven ismert.

- Ha $f\colon]0,\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -\log x$, akkor a

$$D_f(A\|B) = -B\operatorname{Tr}\log B^{-1/2}AB^{-1/2}$$

Belavkin-Staszewski relatív entrópiát kapjuk.

Kérdések

- Hogyan írhatók le az előbbi mennyiségeket megőrző transzformációk kvantumállapotokon, illetve a pozitív definit operátorok halmazán?

Kérdések

- Hogyan írhatók le az előbbi mennyiségeket megőrző transzformációk kvantumállapotokon, illetve a pozitív definit operátorok halmazán?
- Ha valamelyik mennyiség (vagy injektív függvénye) f-divergencia, akkor a korábbi eredmény alkalmazható.

Kérdések

- Hogyan írhatók le az előbbi mennyiségeket megőrző transzformációk kvantumállapotokon, illetve a pozitív definit operátorok halmazán?
- Ha valamelyik mennyiség (vagy injektív függvénye) f-divergencia, akkor a korábbi eredmény alkalmazható.
- Az "új" kvantum f-divergencia csak invertálható B esetén definiált, meg kell mutatni, hogy a definíció kiterjeszthető tetszőleges sűrűségi operátorra.

Kérdések

- Hogyan írhatók le az előbbi mennyiségeket megőrző transzformációk kvantumállapotokon, illetve a pozitív definit operátorok halmazán?
- Ha valamelyik mennyiség (vagy injektív függvénye) f-divergencia, akkor a korábbi eredmény alkalmazható.
- Az "új" kvantum f-divergencia csak invertálható B esetén definiált, meg kell mutatni, hogy a definíció kiterjeszthető tetszőleges sűrűségi operátorra.
- Eredményeink csak véges dimenziós Hilbert-térre érvényesek.

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon I.

Állítás

Tetszőleges $\alpha \in \,]0,1[\, \cup \,]1,\infty[$ *esetén* $D'_\alpha(.\|.)$ *nem kvantum* f*-divergence a sűrűségi operátorok halmazán.*

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon I.

Állítás

Tetszőleges $\alpha \in \,]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$ *esetén* $D'_\alpha(.\|.)$ *nem kvantum* f*-divergence a sűrűségi operátorok halmazán.*

- Egy általánosabb divergencia fogalom (invertálható esettben):

$$D'_{f,g}(A\|B) = \operatorname{Tr} g\left(f(B)Af(B)\right)$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon I.

Állítás

Tetszőleges $\alpha \in \,]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$ *esetén* $D'_\alpha(.\|.)$ *nem kvantum* f*-divergence a sűrűségi operátorok halmazán.*

- Egy általánosabb divergencia fogalom (invertálható esettben):

$$D'_{f,g}(A\|B) = \operatorname{Tr} g\left(f(B)Af(B)\right)$$

- Tetszőleges B sűrűségi operátorra pedig legyen:

$$D'_{f,g}(A\|B) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} D'_{f,g}(A\|B+\varepsilon I).$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon II.

Állítás

Ha $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *folytonos függvény és* $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$, *továbbá* $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *folytonos függvény és* $g(0) = 0$, *akkor*

$$D'_{f,g}(A \| B) = \operatorname{Tr} g\left(f(B|_{\operatorname{supp} B}) P_B A P_B f(B|_{\operatorname{supp} B})\right).$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon II.

Állítás

Ha $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *folytonos függvény és* $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$, *továbbá* $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *folytonos függvény és* $g(0) = 0$, *akkor*

$$D'_{f,g}(A\|B) = \operatorname{Tr} g\left(f(B|_{\operatorname{supp} B}) P_B A P_B f(B|_{\operatorname{supp} B})\right).$$

Állítás

Ha $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *folytonos függvény és* $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = \infty$, *továbbá* $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *monoton növekvő folytonos függvény és* $\lim_{\omega \to \infty} g(\omega) = \infty$, *akkor*

$$D'_{f,g}(A\|B) = \begin{cases} \operatorname{Tr} g\left(f(B|_{\operatorname{supp} B}) P_B A P_B f(B|_{\operatorname{supp} B})\right), & P_A \leq P_B \\ \infty, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon III.

Tétel (Gaál M. és Molnár L., 2015)

Legyen $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *folytonos függvény és* $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$, *továbbá* $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *injektív folytonos függvény és* $g(0) = 0$. *Ha a* ϕ *transzformációra*

$$D'_{f,g}(\phi(A)\|\phi(B)) = D'_{f,g}(A\|B) \quad (A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}))$$

teljesül, akkor létezik egy $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, amelyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon IV.

Tétel (Gaál M. és Molnár L., 2015)

Legyen $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *szigorúan monoton csökkenő szigorúan konvex függvény és* $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = \infty$, *továbbá* $g: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *szigorúan monoton növekvő szigorúan konvex (konkáv) függvény és* $\lim_{\omega \to \infty} g(\omega) = \infty$. *Ha a* ϕ *transzformációra*

$$D'_{f,g}(\phi(A) \| \phi(B)) = D'_{f,g}(A \| B) \quad (A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}))$$

teljesül, akkor létezik egy $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, amelyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

A kvantum Rényi-divergencia állapotokon V.

Az előző tételeket az $f(t) = t^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}$ és $g(t) = t^{\alpha}$ függvényekre alkalmazva adódik, az alábbi

Következmény

Ha $\alpha \in]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$ *és a* ϕ *transzformációra*

$$D_\alpha(\phi(A)||\phi(B)) = D_\alpha(A||B) \quad (A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}))$$

teljesül, akkor létezik egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, amelyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

Az "új" kvantum f-divergencia állapotokon I.

Állítás

Legyen $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *konvex függvény, melyre* $f(0) = 0$ *és* $\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)/\omega = \infty$ *teljesül. Ekkor*

$$D_f(A\|B) = \begin{cases} \operatorname{Tr} Bf\left(B^{-1/2}P_B A P_B B^{-1/2}\right), & P_A \leq P_B \\ \infty, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

teljesül, ahol $(.)^{-1}$ *a Moore-Penrose pszeudoinverzet jelöli.*

Az "új" kvantum f-divergencia állapotokon I.

Állítás

Legyen $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *konvex függvény, melyre* $f(0) = 0$ *és* $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = \infty$ *teljesül. Ekkor*

$$D_f(A\|B) = \begin{cases} \operatorname{Tr} Bf\left(B^{-1/2} P_B A P_B B^{-1/2}\right), & P_A \leq P_B \\ \infty, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

teljesül, ahol $(.)^{-1}$ *a Moore-Penrose pszeudoinverzet jelöli.*

Megjegyzés

Mivel $a \in \mathbb{R}$ *esetén* $D_f(.\|.)$ *megőrzése ekvivalens* $D_{f+a}(.\|.)$ *megőrzésével, ezért* $f(0) = 0$ *feltétel mindig teljesíthető.*

Az "új" kvantum f-divergencia állapotokon II.

Tétel (Gaál M., 2016)

Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *szigorúan konvex függvény, melyre* $\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)/\omega = \infty$. *Ha* $\phi\colon \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ *egy leképezés, melyre*

$$D_f(\phi(A)\|\phi(B)) = D_f(A\|B) \quad (A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}))$$

teljesül, akkor létezik egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, amelyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})).$$

Rendezés két karakterizációja pozitív definit operátorokon

Lemma (Gaál M. és Molnár L., 2015)

Legyen $h\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *szigorúan monoton, folytonos függvény, melyre* $h(0)=0$. *Ekkor*

$$A \leq B \iff \operatorname{Tr} h(\sqrt{A}X\sqrt{A}) \leq \operatorname{Tr} h(\sqrt{B}X\sqrt{B}) \quad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}).$$

teljesül minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ *operátorra.*

Rendezés két karakterizációja pozitív definit operátorokon

Lemma (Gaál M. és Molnár L., 2015)

Legyen $h\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *szigorúan monoton, folytonos függvény, melyre* $h(0)=0$. *Ekkor*

$$A \leq B \iff \operatorname{Tr} h(\sqrt{A}X\sqrt{A}) \leq \operatorname{Tr} h(\sqrt{B}X\sqrt{B}) \quad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}).$$

teljesül minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ *operátorra.*

Lemma (Gaál M., 2016)

Legyen $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *operátor konvex függvény, melyre* $f(0)=0$. *Ekkor*

$$A \leq B \iff D_f(X\|A) \geq D_f(X\|B) \quad \left(X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}\right)$$

teljesül minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$ *operátorra.*

Eredmények pozitív definit operátorokon I.

Tétel (Gaál M. és Molnár L., 2015)

Legyen $\alpha \in \,]0,1[\, \cup \,]1,\infty[$ *paraméter,* $\phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$ *egy* ***bijektív*** *leképezés, melyre*

$$D_\alpha(\phi(A)\|\phi(B)) = D_\alpha(A\|B)$$

teljesül minden $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$ *operátorra. Ekkor létezik egy* $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor és egy* $\lambda > 0$*, amelyre*

$$\phi(A) = \lambda U A U^* \quad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}).$$

Eredmények pozitív definit operátorokon II.

Tétel (Molnár L., 2015)

Legyen $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *operátor monoton csökkenő függvény, melyre* $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = 0$*. Ha* $\phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$ *egy* ***bijektív*** *leképezés, amelyre*

$$D_f(\phi(A) \| \phi(B)) = D_f(A \| B) \quad (A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1})$$

teljesül, akkor létezik egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, melyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}).$$

Eredmények pozitív definit operátorokon III.

Tétel (Gaál M., 2016)

Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *operátor konvex függvény,* $\phi\colon \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}$ *egy* ***bijektív*** *leképezés, amelyre*

$$D_f(\phi(A)\|\phi(B)) = D_f(A\|B) \quad (A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1})$$

teljesül. Ekkor létezik egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *unitér vagy antiunitér operátor, melyre*

$$\phi(A) = UAU^* \qquad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_+^{-1}).$$

Nyitott problémák

- A Dragomir által bevezetett entrópia szimmetria transzformációi a következő esetben:

Nyitott problémák

- A Dragomir által bevezetett entrópia szimmetria transzformációi a következő esettben:
  - Sűrűségi operátorok (állapotok) halmazán
  - $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ operátor monoton csökkenő
  - $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = 0$

Nyitott problémák

- A Dragomir által bevezetett entrópia szimmetria transzformációi a következő esettben:
  - Sűrűségi operátorok (állapotok) halmazán
  - $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ operátor monoton csökkenő
  - $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = 0$
- Akár $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = +\infty$ vagy $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$ határérték relációkat feltételezve.

Nyitott problémák

- A Dragomir által bevezetett entrópia szimmetria transzformációi a következő esettben:
  - Sűrűségi operátorok (állapotok) halmazán
  - $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ operátor monoton csökkenő
  - $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = 0$
- Akár $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = +\infty$ vagy $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$ határérték relációkat feltételezve.
- Ez az $f(x) = -\log x$, illetve a Tsallis-entrópia generáló függvényének esetének felelne meg.

Nyitott problémák

- A Dragomir által bevezetett entrópia szimmetria transzformációi a következő esettben:
  - Sűrűségi operátorok (állapotok) halmazán
  - $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ operátor monoton csökkenő
  - $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega)/\omega = 0$
- Akár $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = +\infty$ vagy $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(\varepsilon) = 0$ határérték relációkat feltételezve.
- Ez az $f(x) = -\log x$, illetve a Tsallis-entrópia generáló függvényének esetének felelne meg.
- Elhagyható-e a bijektivitás feltétele pozitív definit operátorokon?