

Kalkulus 1

Andai Attila*

2014. május 10.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Halmazelméleti alapok	1
1.1. Logikai alapok	1
1.2. Elemi halmazműveletek	2
1.3. Relációk	3
1.4. Függvények	4
1.5. Halmazrendszerek	6
1.6. Rendezések	7
1.7. Ekvivalenciarelációk	8
1.8. Valós számok	9
1.9. Számosságok	12
2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai	15
2.1. Algebrai tulajdonságok	15
2.2. Függvények összege, szorzata	18
3. Topológiai tulajdonságok	21
3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok	21
3.2. Kompakt halmazok	25
4. Sorozatok	27
4.1. A határérték és tulajdonágai	27
4.2. Topológiai fogalmak jellemzése sorozatokkal	31
4.3. Limesz inferior és szuperior	33
4.4. Cauchy-sorozatok	34
4.5. Nevezetes határértékek	34
5. Sorok	41
5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai	41
5.2. Majoráns és minoráns kritérium	42
5.3. Abszolút konvergens sorok	43
5.4. Konvergenciakritériumok	44
5.5. Leibniz-sorok	47
5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok	47
5.7. Sorok Cauchy-szorzata	48
5.8. Sorok pontonkénti szorzata	50
5.9. Elemi függvények	51
5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás	52
6. Valós függvények elemi vizsgálata	55
6.1. Függvények tulajdonságai	55
6.2. Függvény határértéke	56
6.3. Féloldali határérték	61
6.4. Függvény folytonossága	62
6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei	66
6.6. Függvény egyenletes folytonossága	68
6.7. Hatványsorok határértéke	68
6.8. Elemi függvények folytonossága	69
6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai	70
6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai	75
7. Differenciálszámítás egy dimenzióban	79
7.1. Differenciálhatóság	79
7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai	80
7.3. Hatványsorok deriválása	82
7.4. Középértéktételek	83

7.5.	Függvény inverzének deriválása	84
7.6.	Elemi függvények inverzének deriválása	84
7.7.	L'Hospital szabály	86
7.8.	Többszörös deriváltak	88
7.9.	Taylor-sorfejtés	90
7.10.	Lokális szélsőérték jellemzése	92
7.11.	Binomiális sorfejtés	95
8.	Határozatlan integrál.....	97
8.1.	Primitív függvény és tulajdonságai	97
8.2.	Integrálási módszerek	98
8.3.	Parciális törtekre bontás	101
9.	Határozott integrál.....	103
9.1.	A <i>majdnem mindenütt</i> tulajdonság	103
9.2.	A Riemann-integrál	106
9.3.	A Riemann-integrálhatóság kritériumai	108
9.4.	Riemann-integrálás alaptulajdonságai	110
9.5.	Newton–Leibniz-tétel	113
9.6.	Az integrálfüggvény	114
9.7.	Lebesgue-tétel	115
9.8.	Improprius integrál	117
10.	Függelék.....	119
10.1.	Az elemi függvények grafikonjai	119
10.2.	Tizedestörtek	121
10.3.	Valós számok szögfüggvényei	124
10.4.	Jensen-tétel következményei	127
10.5.	Wallis- és Stirling-formula	129
10.6.	A gamma függvény	134
10.7.	Az analitikus számelmélet pár tétele	136
	Tárgymutató.....	147

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában. Továbbá köszönöm *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézését.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2023 ©Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Logikai alapok

Magyarázat. A mai modern matematika nagy része, többek között az analízis is, felépíthető a halmazelméletből. Nem célunk a halmazelmélet axiómáiból teljesen részletesen felépíteni az analízist, de az axiómáktól a definíciókig, tételenként vezető utat szeretnénk világossá tenni.

Magyarázat. A halmazelméletet megelőző elméleteket, mint például a logikát vagy a formális nyelvek elméletét egyáltalán nem említjük, mindössze a jelölések egységesítése végett teszünk néhány megjegyzést velük kapcsolatban.

Jelölés. A halmazelméletben definiálatlan alapfogalomként szerepel a *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezés. Tehát bármely A és B halmaz esetén értelmes az a kijelentés, hogy A eleme a B halmaznak. Az „ A eleme a B halmaznak” kijelentést az $A \in B$ szimbólummal jelöljük.

Magyarázat. A halmazelmélet axiómáinak az áttekintéséhez szükséges az alapvető logikai jelek ismerete.

Jelölés. A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

- $\neg p$: p tagadása, negációja;
- $p \vee q$: p vagy q ;
- $\exists$: létezik szimbólum.

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_{\in}$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_{\in}$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_{\in}$ eleme;
- minden $p, q \in F_{\in}$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_{\in}$$

teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: p és q , ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \rightarrow (q)$: p -ből q következik, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: p és q ekvivalensek, ha $((p) \rightarrow (q)) \wedge ((q) \rightarrow (p))$;
- $\forall x(p)$: minden x esetén p teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

Magyarázat. Minden $p, q \in F_{\in}$ formula és x_i változójel esetén

$$(p) \wedge (q), (p) \neq (q), (p) \rightarrow (q), (p) \leftrightarrow (q), \forall x_i(p)$$

is formula. Amennyiben a formulákon belül a zárójelezés az értelmezést nem befolyásoló módon elhagyható, akkor az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk.

Jelölés. A továbbiakban $x \notin y$ jelöli a $\neg(x \in y)$ formulát, valamint $x \neq y$ a $\neg(x = y)$ formulát.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázatban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

Magyarázat. A halmazelmélet axiómái megmondják, hogy mely formulák biztosan igazak. Ezekből az alap formulákból (axiómákból) vezetünk le később további formulákat (tételeket).

Magyarázat. Ezek alapján levezethető a többi logikai művelet igazságtáblája.

1.4. Tétel. Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Bizonyítás. A definícióból elemi számolással adódik.

1.5. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.6. Tétel. A p, q és r formulára

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\
p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{array}$$

teljesül.

Bizonyítás. A $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ azonosságot az alábbi igazságtábla bizonyítja.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
i	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A többi azonosság is hasonló módon származtatható igazságtáblázatokból.

1.2. Elemi halmazműveletek

1.7. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cup B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v (v \in A \cup B \leftrightarrow (v \in A \vee v \in B))$$

teljesül, valamint A és B *uniójának* nevezzük.

1.8. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cap B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v (v \in A \cap B \leftrightarrow (v \in A \wedge v \in B))$$

teljesül, valamint A és B *metszetének* nevezzük.

1.9. Definíció. Adott A halmaz esetén $\mathcal{P}(A)$ halmaz jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v (v \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow v \subseteq A)$$

teljesül, valamint az A *hatványhalmazának* nevezzük.

1.10. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A \mid x \notin B\}$ halmazt A és B különbségének nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.11. Tétel. Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset & A \cap A &= A & A \cap B &= B \cap A & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup \emptyset &= A & A \cup A &= A & A \cup B &= B \cup A & A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

Bizonyítás. A tételben szereplő állítások elemi számolással visszavezethetők az 1.6 tételben szereplő logikai összefüggésekre.

1.12. Tétel. (Cantor-tétel.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.

Bizonyítás. Indirekt: Legyen x az a halmaz, mely minden halmazt tartalmaz és legyen $y \triangleq \{z \in x \mid z \notin z\}$. Ekkor mind $y \in y$, mind $y \notin y$ ellentmondáshoz vezet.

1.3. Relációk

1.13. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.14. Tétel. Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor nyilván $(x, y) = (a, b)$. Tegyük fel, hogy $(x, y) = (a, b)$, vagyis $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ teljesül. Ekkor $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a\}$, akkor $x = y = a$, valamint $a = b$, tehát ekkor $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a, b\}$, akkor $x = a$, valamint $\{a, y\} = \{a, b\}$ miatt $y = b$, vagy $y = a$, ami ugyancsak azt jelenti, hogy $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a, b\}$, akkor $x = a = b$ és $y = b$, tehát $x = a$ és $y = b$.

1.15. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A, b \in B\}$$

halmazt.

1.16. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

- értelmezési tartománya

$$\text{Dom } R \triangleq \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\};$$

- értékkészlete

$$\text{Ran } R \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\};$$

- inverze

$$R^{-1} \triangleq \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\};$$

- általi képe a $H \subseteq X$ halmaznak

$$R(H) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in H : (x, y) \in R\};$$

– megszorítása vagy leszűkítése a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}.$$

Magyarázat. Nyilván minden $R \subseteq X \times Y$ relációra minden $H \subseteq X$ esetén

$$R(H) = \text{Ran } R|_H$$

teljesül.

1.17. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\text{id}_X \triangleq \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.4. Függvények

1.18. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' ((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R) \rightarrow y = y'$$

teljesül.

Jelölés. Az $f \subseteq X \times Y$ függvényre a továbbiakban az $f : X \rightarrow Y$ jelölést használjuk. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény értelmezési tartománya $\text{Dom } f \subseteq X$ és értékkészlete $\text{Ran } f \subseteq Y$. Az f függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x)$$

alakban írjuk fel. A $H \subseteq X$ esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x).$$

Abban az esetben, amikor az $f : X \rightarrow Y$ függvényre $\text{Dom } f = X$ teljesül az $f : X \rightarrow Y$ jelölést fogjuk használni. Tehát az $f : X \rightarrow Y$ jelentése az, hogy f függvény és $\text{Dom } f = X$.

Jelölés. A mindenhol értelmezett függvények halmazára bevezetjük az

$$\mathcal{F}(X, Y) = \{f \subseteq X \times Y \mid f \text{ függvény, } \text{Dom } f = X\}$$

jelölést, valamint megemlíjük, hogy szokásos még az Y^X jelölés is erre a függvényhalmazra, de egészen kivételes esetektől eltekintve ezt nem használjuk.

1.19. Definíció. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény

- *injektív*, ha $\forall x, x' \in X : (f(x) = f(x')) \rightarrow x = x'$;
- *szürjektív*, ha $\text{Ran } f = Y$;
- *bijektív*, ha $\text{Dom } f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \rightarrow X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.20. Tétel. Ha f függvény, akkor f^{-1} pontosan akkor függvény, ha f injektív.

Bizonyítás. Legyen $f : X \rightarrow Y$ függvény. Az f függvény injektivitása azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \forall y \in Y : ((x, y) \in f \wedge (x', y) \in f) \rightarrow x = x'.$$

Az f^{-1} reláció függvényszerűsége azt jelenti, hogy

$$\forall x, x' \in X \forall y \in Y : ((y, x) \in f^{-1} \wedge (y, x') \in f^{-1}) \rightarrow x = x'.$$

Vagyis a két kijelentés ekvivalens egymással.

1.21. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az f^{-1} függvényt f^{-1} jelöli és ez az f függvény inverze. Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény invertálható.

1.22. Tétel. *Függvények kompozíciója függvény.*

Bizonyítás. Legyen $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$, valamint tegyük fel, hogy $(x, z_1), (x, z_2) \in (g \circ f)$. A relációk kompozíciójának az értelmezése alapján létezik olyan $y_1, y_2 \in Y$, melyre $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$, $(y_1, z_1) \in g$ és $(y_2, z_2) \in g$ teljesül. Mivel f függvény, így $y_1 = y_2$, tehát az $(y_1, z_1) \in g$ és a $(y_2, z_2) \in g$ relációkból g függvényszerűségének a felhasználásával $z_1 = z_2$ adódik, vagyis $g \circ f$ függvény.

Magyarázat. Tehát az $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$ függvény kompozícióját úgy értelmezzük, mint az f és g reláció kompozícióját. Ekkor $g \circ f$ értelmezési tartománya

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid x \in \text{Dom } f, f(x) \in \text{Dom } g\}.$$

A függvénykompozíciót a

$$g \circ f : X \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

alakban is írhatjuk.

1.23. Tétel. *Bármely $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$ és $h \in \mathcal{F}(Z, V)$ függvényre*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad \text{id}_Y \circ f = f \circ \text{id}_X = f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(x, v) \in h \circ (g \circ f)$. Ekkor létezik olyan $z \in Z$, hogy $(x, z) \in (g \circ f)$ és $(z, v) \in h$. Amiből következik, hogy létezik olyan $y \in Y$, hogy $(x, y) \in f$ és $(y, z) \in g$. Ekkor $(y, z) \in g$ és $(z, v) \in h$ miatt $(y, v) \in h \circ g$, valamint $(x, y) \in f$ miatt $(x, v) \in (h \circ g) \circ f$. Az identitásfüggvényre vonatkozó azonosság nyilvánvalóan adódik az identitásfüggvény definíciójából.

Magyarázat. A megszokott matematikai műveletek is függvények, melyek főbb tulajdonságait az alábbiakban definiáljuk.

1.24. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \rightarrow X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+$: $X \times X \rightarrow X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \triangleq +(x, y)$ jelöléssel élünk.

- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

$$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \wedge x' + x = e,$$

ahol e jelöli az egységelemet.

- A $\cdot$: $X \times X \rightarrow X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.25. Tétel. *(Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény. Legyen $Y \triangleq \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Ekkor létezik $x_0 \in A$, melyre $f(x_0) = Y$. Ekkor az $x_0 \in Y$ feltevés és az $x_0 \notin Y$ feltevés is ellentmondáshoz vezet.

1.5. Halmazrendszerek

1.26. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.27. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer *uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

1.28. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer *Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i \right\}$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

Jelölés. A Descartes-szorzat elemei tehát az indexhalmazon értelmezett speciális függvények. Abban az esetben, amikor az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre minden $i, j \in I$ esetén $A_i = A_j$ teljesül, akkor az $A = A_i$ jelölést bevezetve a halmazrendszer Descartes-szorzatára

$$\prod_{i \in I} A = \{f : I \rightarrow A\} = \mathcal{F}(I, A)$$

adódik, amit gyakran az A^I szimbólummal fogunk jelölni.

1.29. Tétel. Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a

$$\varphi : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y))$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Ekkor $(\alpha(x), \alpha(y)) = (\beta(x), \beta(y))$, amiből $\alpha(x) = \beta(x)$ és $\alpha(y) = \beta(y)$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. Vagyis a φ leképezés injektív. Ha $(c_x, c_y) \in A_x \times A_y$, akkor az $f = \{(x, c_x), (y, c_y)\} \in \prod_{i \in I} A_i$ függvényre $\varphi(f) = (c_x, c_y)$ teljesül, vagyis φ szürjektív.

Magyarázat. Ezen tétel értelmében a halmazrendszer szorzata tekinthető a korábban értelmezett Descartes-szorzat általánosításának, ez indokolja az elnevezést.

1.30. Tétel. Ha $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I (A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

1.31. Definíció. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.

– Adott $k \in I$ esetén a

$$\text{pr}_k : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_k \quad x \mapsto x_k$$

függvényt a *k-adik projekció függvénynek* nevezzük.

- Adott $a \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a

$$\text{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i \in I} A_i \mid u_k = a, \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$

függvényt a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén

$$(\text{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha } i = k; \\ a_k, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

1.6. Rendezések

1.32. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött*. Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:

- *reflexív*, ha $\forall x \in X ((x, x) \in R)$;
- *transzítív*, ha $\forall x, y, z \in X ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow x = y$.

1.33. Tétel. Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció.

1. Az R pontosan akkor reflexív, ha $\text{id}_X \subseteq R$.
2. Az R pontosan akkor transzítív, ha $R \circ R \subseteq R$.
3. Az R pontosan akkor szimmetrikus, ha $\bar{R} = R$.
4. Az R pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \bar{R} \subseteq \text{id}_{\text{Dom } R}$.

Bizonyítás. A definíciók közvetlen következménye.

1.34. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, transzítív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz*.

Jelölés. A rendezéseket általában a $\leq, \geq, \preceq, \succeq$ szimbólummal jelöljük. A továbbiakban $(x, y) \in \leq$ helyett az $x \leq y$ jelölést használjuk, és bevezetjük az $x < y$ rövidítést az $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ formula helyett.

1.35. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X \ x' \leq x$ ($x \leq x'$) teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) *korlátos*, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X -nek nem létezik x -nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

Magyarázat. Rendezett halmaz egy részhalmazának legfeljebb egy legnagyobb (illetve legkisebb) eleme létezhet, de lehet több maximális (illetve minimális) eleme.

1.36. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.37. Tétel. Legyen $(A, \leq)$ lineárisan rendezett halmaz és $X \subseteq A$.

1. Az $y \in A$ elemre $\sup X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y felső korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A : (z < y \rightarrow (\exists x \in X : z < x))$ teljesül.
2. Az $y \in A$ elemre $\inf X = y$ pontosan akkor teljesül, ha y alsó korlátja az X halmaznak és $\forall z \in A : (z > y \rightarrow (\exists x \in X : z > x))$ teljesül.

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a második hasonló gondolatmentéssel igazolható.

$\Rightarrow$ Legyen $y = \sup X$. Ekkor y definíció szerint felső korlátja az X halmaznak. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z \in A$, melyre $z < y$ és minden $x \in X$ esetén $x \leq z$. Ekkor z felső korlátja az X halmaznak és kisebb mint y , vagyis nem $y = \sup X$ az X halmaz legkisebb felső korlátja, ami ellentmondás.

$\Leftarrow$ Legyen y olyan felső korlátja az X halmaznak, melyre $\forall z \in A : (z < y \rightarrow (\exists x \in X : z < x))$ teljesül. Ekkor y a legkisebb felső korlát, vagyis $y = \sup X$.

1.38. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

Magyarázat. A jólrendezett halmaz definíciójából azonnal következik, hogy minden jólrendezett halmaz lineárisan rendezett és nem az üres halmaz.

1.39. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$[x, y] = \{z \in A \mid x \leq z \leq y\}$$

$$[x, y[= \{z \in A \mid x \leq z < y\}$$

$$]x, y] = \{z \in A \mid x < z \leq y\}$$

$$]x, y[= \{z \in A \mid x < z < y\}$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.40. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.41. Tétel. (Kuratowski–Zorn-lemma.) Minden induktívan rendezett halmaznak létezik maximális eleme.

1.7. Ekvivalenciarelációk

1.42. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

Jelölés. Az ekvivalenciarelációkat a $\approx, \sim$ szimbólummal jelöljük, továbbá $(x, y) \in \approx$ helyett az $x \approx y$ jelölést használjuk.

1.43. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \rightarrow y \in X)$.

1.44. Tétel. Legyen A tetszőleges halmaz és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor minden $a \in A$ elemre az

$$a / \approx \stackrel{\Delta}{=} \{x \in A \mid a \approx x\}$$

halmaz ekvivalenciaosztály és az ekvivalenciaosztályok halmazt alkotnak

$$A / \approx \stackrel{\Delta}{=} \{X \in \mathcal{P}(A) \mid \exists a \in A : X = a / \approx\}.$$

Továbbá az $A / \approx$ ekvivalenciaosztályok diszjunkt halmazrendszert alkotnak, azaz

$$\forall x, y \in A / \approx : x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset, \quad \text{és} \quad \bigcup \{x \mid x \in A / \approx\} = A$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges halmaz, $a \in A$ és $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Mivel $a \approx a$, ezért $a \in a/\approx$, vagyis $a/\approx \neq \emptyset$. Ha $x, y \in a/\approx$, akkor $x \approx a$, $y \approx a$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt $x \approx y$ adódik. Ha $x \in a/\approx$ és $y \in A$ olyan elem, melyre $x \approx y$ teljesül, akkor $y \approx a$ a $\approx$ reláció tranzitivitása miatt, vagyis $y \in a/\approx$.

Legyen $x/\approx, y/\approx \in A/\approx$ olyan, hogy $x/\approx \neq y/\approx$. Tegyük fel, hogy $c \in (x/\approx) \cap (y/\approx)$. Ekkor $x \approx c$ és $y \approx c$, vagyis $x \approx y$, amiből a $\approx$ reláció tranzitivitásának felhasználásával az $x/\approx = y/\approx$ ellentmondás adódik. Tehát feltételezésünkkel ellentétben nem létezhet olyan c elem, melyet az $x/\approx$ és az $y/\approx$ halmaz is tartalmaz, így $(x/\approx) \cap (y/\approx) = \emptyset$.

Ha $x \in A/\approx$, akkor $x \subseteq A$, vagyis az A részhalmazainak az egyesítése nyilván részhalmaza az A halmaznak, ezért csak a $A \subseteq \bigcup \{x/\approx \mid x \in A/\approx\}$ tartalmazást kell igazolni. Ha $a \in A$, akkor nyilván $a \in a/\approx \in A/\approx$, vagyis $a \in \bigcup \{x/\approx \mid x \in A/\approx\}$.

1.8. Valós számok

1.45. Tétel. Létezik olyan $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ nyolcas, ahol

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;

2. $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ függvény, $-: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ függvény a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \quad & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & a + b = b + a \end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

3. $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ függvény, $^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ függvény a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részhalmaz, melyre minden $(a, b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ jelölést használjuk és mely rendelkezik a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & a \leq b \vee b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b) \rightarrow a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge 0 \leq c) \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

5. továbbá

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : a \leq K)) \rightarrow \\ \rightarrow (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s) \wedge (\forall s' \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s') \rightarrow s \leq s')))))) \end{aligned}$$

teljesül.

Továbbá az 1.–4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ struktúrákat nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testen, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.

Jelölés. A szorzás $\cdot$ jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\frac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$.

1.46. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Az A halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezzük minden olyan $C \in \mathbb{R}$ elemet, amelyre $\forall a \in A \ a \leq C$ ($C \leq a$) teljesül.
- Az A halmaz *felülről* (illetve *alulról*) *korlátos*, ha létezik az A halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az A halmaz *korlátos*, ha A felülről és alulról is korlátos.
- Az A halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) *elemének* nevezzük A minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az A halmaznak.
- Az A halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az A halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup A$ (illetve $\inf A$).

Magyarázat. A rendezett testekben (így a valós számok körében is) érvényes számolási szabályokat foglalja össze a következő tétel.

1.47. Tétel. Legyen $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $\forall x \in K : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : \quad x < y \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : \quad (x < y \wedge z < 0) \rightarrow yz < xz$
7. $\forall x \in K : \quad 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : \quad 0 < x < y \rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bizonyítás.

1. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.

2. Ha $x \in K$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x &= 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \\ &= -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x. \end{aligned}$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.

4. Ha $x, y \in K$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.

5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot

$$0 = -1 + (-1)^2,$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2$$

adódik.

6. Legyen $x, y, z \in K$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.

7. Legyen $x \in K$. Ha $0 \leq x \in K$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.

8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.

9. Legyen $x \in K$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\frac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \frac{1}{x}$. Ha $x, y \in K$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\frac{1}{xy}$ számmal $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ adódik.

1.48. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

Bizonyítás. Az 1.47 tétel 7. pontja éppen ez volt.

1.49. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *minusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\preceq \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha } a > 0, \\ -\infty & \text{ha } a < 0, \end{cases}$$

továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.50. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned} [x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z\} \\]x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z\} \\]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\} \\]-\infty, x[&= \{z \in \mathbb{R} \mid z < x\} \end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

Jelölés. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a bővített $\preceq$ relációra továbbra is a $\leq$ jelet használjuk, valamint a bővített $+$ és $\cdot$ műveletre sem alkalmazunk új jelölést.

1.51. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.52. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen K nem arkhimédészi módon rendezett test és legyen $x, y \in K$ olyan, hogy $0 < x$ és egyetlen $n \in \mathbb{N}$ számra sem teljesül, hogy $y < n \cdot x$. Ekkor az $X \triangleq \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felső korlátja y , vagyis létezik $\sup X$. Ekkor $(\sup X) - x$ nem felső korlátja az X halmaznak, tehát létezik $n \cdot x \in X$, melyre $(\sup X) - x < n \cdot x$, vagyis $\sup X < (n+1) \cdot x$, ami ellentmondás.

1.53. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

Bizonyítás. Az 1.45 tétel alapján $\mathbb{R}$ teljesen rendezett test, az előző 1.52 tétel alapján pedig minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett test.

1.54. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{Z} \mid x < n\} - 1, & \text{ha } x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x egész részének a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x tört részének nevezzük.

Magyarázat. Eddig láttuk, hogy létezik teljesen rendezett test, a következő tétel a teljesen rendezett testek egyértelműségéről szól.

1.55. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, {}^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ teljesen rendezett test, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{K}$ bijekció, melyre $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1) = \mathbf{1}$ és minden $x, y \in \mathbb{R}$ elem esetén*

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 &\Rightarrow \varphi(x) \neq \mathbf{0} \wedge \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y &\Leftrightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y)\end{aligned}$$

teljesül.

1.9. Számosságok

1.56. Definíció. Legyen A és B halmaz.

- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f : A \rightarrow B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

Magyarázat. Fontos megjegyezni, hogy jelen pillanatban $|A|$ még csak pusztán szimbólum, melyet nem definiáltunk, csak az $|A| \leq |B|$, az $|A| < |B|$ és az $|A| = |B|$ típusú kifejezéseket értelmeztük eddig.

Magyarázat. Most a halmazok számosságának két alaptétele következik, melyek biztosítják, hogy bármely két halmaz összehasonlítható a számosság tekintetében, valamint, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

1.57. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

Bizonyítás. Legyen A, B halmaz és

$$\mathcal{F} \triangleq \{f \subseteq A \times B \mid f \text{ injektív függvény}\},$$

melyen $\leq$ jelöli a tartalmazás relációt. Először megmutatjuk, hogy létezik maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban. Legyen $H \subseteq \mathcal{F}$ olyan halmaz, melynek bármely két eleme összehasonlítható és legyen $f \triangleq \bigcup_{h \in H} h$. Ekkor f injektív, tehát $f \in \mathcal{F}$ és f a H egy felső korlátja. Tehát $(\mathcal{F}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz. Ezért a Zorn-lemma miatt van maximális elem az $\mathcal{F}$ halmazban, jelölje ezt g . Ekkor a g függvényre $\text{Dom } g = A$ vagy $\text{Ran } g = B$ teljesül, ugyanis ha $\text{Dom } g \neq A$ és $\text{Ran } g \neq B$, akkor létezik $a_0 \in A \setminus \text{Dom } g$ és $b_0 \in B \setminus \text{Ran } g$ elem és a

$$\tilde{g} : \text{Dom } g \cup \{a_0\} \rightarrow \text{Ran } g \cup \{b_0\} \quad x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \in \text{Dom } g; \\ b_0, & \text{ha } x = a_0 \end{cases}$$

függvényre $g < \tilde{g}$ teljesül, vagyis g nem maximális.

Ha $\text{Dom } g = A$, akkor $|A| \leq |B|$ és ha $\text{Ran } g = B$, akkor $|B| \leq |A|$.

1.58. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $i : A \rightarrow B$ és $j : B \rightarrow A$ injektív leképezés.

1. Ha $E \subseteq A$ olyan, hogy $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül, akkor a

$$\rho : A \rightarrow B \quad x \mapsto \begin{cases} i(x) & \text{ha } x \in E \\ j^{-1}(x) & \text{ha } x \notin E \end{cases}$$

leképezésről könnyen ellenőrizhető, hogy bijekció.

2. Legyen $\mathcal{H} \triangleq \{H \subseteq A \mid j(B \setminus i(H)) \subseteq A \setminus H\}$ és $E \triangleq \cup \mathcal{H}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$ teljesül.

2./1. $j(B \setminus i(E)) \subseteq A \setminus E$:

$$\begin{aligned} i(E) &= i\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) \\ B \setminus i(E) &= B \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} i(H) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H) \\ j(B \setminus i(E)) &= j\left(\bigcap_{H \in \mathcal{H}} B \setminus i(H)\right) \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}} A \setminus H = A \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H = A \setminus E \end{aligned}$$

2./2. $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$: Legyen $F \triangleq A \setminus j(B \setminus i(E))$. A 2./1. miatt $E \subseteq F$.

$$E \subseteq F \implies j(B \setminus i(F)) \subseteq j(B \setminus i(E)) = A \setminus F \implies F \in \mathcal{H}$$

Mivel $E \subseteq F$, $F \in \mathcal{H}$ és $E = \cup \mathcal{H}$, ezért $E = F$, vagyis $j(B \setminus i(E)) = A \setminus E$.

1.59. Tétel. Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.

Bizonyítás. Az 1.25 Cantor-tétel következménye.

1.60. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.

- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.61. Tétel. Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.
2. $|A \times B| = mn$
3. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

1.62. Tétel. (Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)

1. Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.
2. Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.
3. Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.
4. Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. (Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$ teljesül, akkor

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i,$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, és legyen $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, \infty[$ olyan, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$. Ekkor az indukciós feltételt kihasználva

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) = (1 + x_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq (1 + x_{n+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i \right) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^n x_i x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $n + 1$ esetén is igaz az állítás.

Kiegészítés. A Bernoulli-egyenlőtlenség speciális esetének egyfajta megfordítása is igaz. ◇

2.2. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.

2.3. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x n -edik gyökének nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.4. Tétel. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Bizonyítás. Az $\alpha = \sqrt[n]{x^m}$ és a $\beta = (\sqrt[n]{x})^m$ számokra $\alpha^n = x^m = \beta^n$ teljesül. Ezen számok n -edik gyöke létezik és egyértelmű, ezért $\alpha = \beta$.

2.5. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjő hatványát az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha } q > 0, q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha } q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha } q < 0, q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$ és $0^0 \triangleq 1$.

2.6. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságaiiból egyszerűen adódik.

2.7. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0, \\ \prod_{i=1}^n i, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az n alatt a k számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha } k \leq n \\ 0 & \text{ha } k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.8. Tétel. (*Binomiális tétel.*) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

adódik a könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

formula segítségével.

2.9. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K : (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K : |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K : |x + y| \leq |x| + |y|$

2.10. Tétel. Az

$$|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad z \mapsto \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

függvény abszolút érték, melynek a megszorítása a valós illetve racionális számok halmazára szintén abszolút érték.

Bizonyítás. Ha $z = 0$, akkor nyilván $|z| = 0$, valamint ha $|z| = 0$, akkor $\operatorname{Re} z = 0$ és $\operatorname{Im} z = 0$, vagyis $z = 0$. Ha $z_1 = a_1 + i b_1$ és $z_2 = a_2 + i b_2$, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, akkor

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

valamint

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

teljesül, ahol a második résznél használtuk a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget a

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

lépésnél.

2.11. Tétel. *(Számítási és mértani közép közötti egyenlőtlenség.)* Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}.$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás.

2. Ha $n = 2$, akkor a bizonyítandó

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel. Azt pedig az 1.48 tétel alapján tudjuk, hogy rendezett testekben a négyzetszámok pozitív elemek.

3. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, akkor a $2n$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, 2n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor felhasználva, hogy az n és a 2 számokra igaz az egyenlőtlenség

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{n+k} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_{n+k}} \right) \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_{n+k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{2n} x_k} \end{aligned}$$

adódik.

4. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ számra igaz az állítás, akkor az $n - 1$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$ és legyen

$$x_n = \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k}.$$

Ekkor az $x_1, \dots, x_n$ számokra felírt számítási és mértani közép közötti egyenlőtlenség átrendezéséből adódik az állítás.

2.12. Tétel. *(Elemi Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.)*

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (x_k - ty_k)^2 = t^2 \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2t \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right),$$

ezért a fenti t szerinti másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$4 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \leq 0,$$

amiből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2.2. Függvények összege, szorzata

2.13. Definíció. Legyen A halmaz, $+: A \times A \rightarrow A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$U + V := \{u + v \in A \mid u \in U, v \in V\}$$

$$a + V := \{a + v \in A \mid v \in V\}$$

$$U + a := \{u + a \in A \mid u \in U\}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek*.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) & (U, V) \mapsto U + V \\ \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) & V \mapsto a + V \\ \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) & U \mapsto U + a \end{array}$$

2.14. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

- Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét, szorzatát, számszorosát és abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{array}{ll} f + g : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto f(a) + g(a) \\ fg : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto f(a)g(a) \\ cf : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto cf(a) \\ |f| : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto |f(a)| \end{array}$$

- értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{array}{ll} + : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f, g) \mapsto f + g \\ \times : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f, g) \mapsto fg \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (c, f) \mapsto cf \\ |\cdot| : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) & (f) \mapsto |f| \end{array}$$

Az így bevezetett függvénytűveleteket nevezzük *pontonkénti függvénytűveleteknek*.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{array}{ll} \sup(f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto \sup(f_1(a), \dots, f_n(a)) \\ \inf(f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto \inf(f_1(a), \dots, f_n(a)) \end{array}$$

- Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$\begin{array}{ll} f_+ : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto \sup(f(a), 0) \\ f_- : A \rightarrow \mathbb{R} & a \mapsto -\inf(f(a), 0) \end{array}$$

2.15. Tétel. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

1. Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor

$$f = f_+ - f_- \quad |f| = f_+ + f_- \quad f_+ f_- = 0 \quad (2.1)$$

teljesül.

2. Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

1. Legyen $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és legyen $a \in A$ tetszőleges.

Ha $f(a) > 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = f(a)$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.

Ha $f(a) = 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a (2.1) egyenletek.

Ha $f(a) < 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = -f(a)$, vagyis ebben az esetben is teljesülnek a (2.1) egyenletek.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $a < b$, $a = b$ és $a > b$ eseteket külön megvizsgálva igazolható egyszerűen a

$$\sup(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \quad \inf(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

azonosság. Legyen $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor elég minden $x \in A$ elemre az $a = f(x)$ és $b = g(x)$ választással alkalmazni az előző azonosságot a tétel bizonyításához.

2.16. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p n -ed fokú polinom, melynek főegyütthatója a_n . Az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a p polinom gyökének nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Nyílt, zárt és korlátos halmazok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$$

halmazt az x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{R} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció közvetlen következménye. A második állításhoz vegyünk $A_1, \dots, A_n$ korlátos halmazokat, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1, \dots, n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén $R_i = r_i + |x_i - x_1|$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt.

Tehát az $R = \max \{R_i \mid i = 1, \dots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq B_R(x_1)$.

3.4. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - |x - y|$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $|z - y| < R = r - |x - y|$, vagyis $|x - y| + |y - z| < r$, amiből pedig $|x - z| < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

3.5. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*

1. Az üres halmaz és a $\mathbb{R}$ halmaz nyílt.
2. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min \{r_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

3.6. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*

1. Az üres halmaz és a $\mathbb{R}$ halmaz zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.
3. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i \in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus Z_i)$$

azonosság miatt $\bigcap_{i \in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt.

Vagyis a $\bigcap_{i \in I} Z_i$ halmaz zárt.

3.7. Tétel. Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{R}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{R} \setminus U)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

3.8. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *törlődési pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X = \{x\}$.

3.9. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.10. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\text{Int } X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \text{Int } X$$

halmazt.

3.11. Tétel. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

1. $\text{Int } X$ halmaz nyílt;

2. $\text{Int } X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;
3. $\overline{X}$ halmaz zárt;
4. $\overline{X}$ az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X -et.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \text{Int } X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \text{Int } X$ teljesül.

2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\text{Int } X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(z) \subseteq X$ adódik, vagyis $z \in \text{Int } X$. Tehát az $U \subseteq \text{Int } X$ tartalmazás is fennáll.

3. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - |y - z| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárt definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.

4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zárttsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárt értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

3.12. Tétel. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén*

1. az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \text{Int } X$;
2. az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

3.13. Tétel. *Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz és legyen $x \in \mathbb{R}$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset,$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset,$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

3.14. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.*

1. Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.
2. Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.

Bizonyítás. 1. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt halmaz. Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf X + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x \in X$, melyre $x < \inf X + r$ teljesül, valamint $\sup X - r$ nem a legkisebb felső korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x' \in X$, melyre $\sup X - r < x'$ teljesül. Tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(\inf X) \cap X \neq \emptyset$ és $B_r(\sup X) \cap X \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\inf X, \sup X \in \overline{X} = X$.

2. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmaz. Ha $\inf X \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(\inf X) \subseteq X$ teljesül, vagyis $\inf X$ nem alsó korlátja az X halmaznak. A $\sup X$ számra hasonló ellentmondást kapunk a $\sup X \in X$ feltételezésből.

3.15. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X halmaz sűrű az Y halmazban, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X halmaz sűrű, ha X sűrű a $\mathbb{R}$ halmazban.

3.16. Tétel. (*A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.*)

1. A $\mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.
2. Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az $\mathbb{R}$ halmazban.

Bizonyítás.

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ tartalmazáshoz azt kell megmutatni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám melyre $q \in B_r(x)$ teljesül, vagyis $q \in]x - r, x + r[$. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < 2Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + N(x - r) < N(x + r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq N(x - r) < n + 1$ teljesül. Ekkor $n \leq N(x - r)$ miatt

$$n + 1 \leq N(x - r) + 1 < N(x - r) + 2Nr = N(x + r),$$

ezért

$$N(x - r) < n + 1 < N(x + r),$$

vagyis a $q_x = \frac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$ számra $q_x \in B_r(x)$ teljesül.

2. Ebben a részben használjuk az oszthatósági szabályok segítségével könnyen igazolható $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ formulát. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az $\mathbb{R}$ arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < \sqrt{2}Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + \frac{\sqrt{2}N}{2}(x - r) < \frac{\sqrt{2}N}{2}(x + r)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} < n + 1$ teljesül.

Ekkor $n \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2}$ miatt

$$n + 1 \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} + \sqrt{2}Nr = \frac{\sqrt{2}N(x + r)}{2},$$

ezért

$$\frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} < n + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x + r)}{2},$$

vagyis a $p_x = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} \cdot \frac{n+1}{N}$ számra $p_x \notin \mathbb{Q}$ és $p_x \in B_r(x)$ teljesül.

3.17. Tétel. (*Cantor-féle közszerész-tétel a valós számok halmazán.*) Legyen $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $k \in I$, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ teljesül, tehát

$$\inf(A_j) \leq \inf(A_k) \leq \sup(A_k) \leq \sup(A_i).$$

Ezek alapján a $\{\sup(A_i) \mid i \in I\}$ halmaz alulról korlátos, vagyis létezik a $x = \inf \{\sup(A_i) \mid i \in I\} \in \mathbb{R}$ elem. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i}$.

Legyen $i \in I$ és $r \in \mathbb{R}^+$, belátjuk, hogy $B_r(x) \cap A_i \neq \emptyset$. Mivel $x + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja a $\{\sup A_i \mid i \in I\}$ halmaznak, ezért létezik olyan $j \in I$, melyre $\sup A_j < x + r$. Legyen $k \in I$ olyan, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor nyilván $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$, továbbá $\sup A_k - r$ nem a legkisebb felső korlátja az A_k halmaznak, ezért létezik olyan $y \in A_k$, melyre $\sup A_k - r < y$. Az utolsó egyenlőtlenség miatt $x - r < y$, $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$ miatt $y < x + r$, valamint $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ miatt $y \in A_i$. Vagyis $y \in B_r(x) \cap A_i$.

Magyarázat. érdemes külön kiemelni a fenti állítás egy következményét.

3.18. Tétel. (Cantor-féle közösrész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az állítás az előzőek közvetlen következménye.

3.2. Kompakt halmazok

3.19. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *(be)fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{R}$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i \in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden

olyan $(A_i)_{i \in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül.

3.20. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre

$X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

3.21. Tétel. (Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az $\mathbb{R}$ halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy C korlátos. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B_n(0)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n(0)$. Ekkor az $r = \max(n)_{n \in I}$ számra $C \subseteq B_r(0)$ teljesül. Most igazoljuk, hogy C zárt. Tegyük fel, hogy C nem zárt, ami azt jelenti, hogy a C komplementere nem nyílt. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus C$ olyan pont, melyre minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(z) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus C$, vagyis $B_r(z) \cap C \neq \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra legyen $U_n = \mathbb{R} \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(z)}$, mely nyílt halmaz. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} U_n$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy

$C \subseteq \bigcup_{n \in I} U_n$. Ekkor az $m = \max(n)_{n \in I}$ számra $C \subseteq U_m$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{B_{\frac{1}{m}}(z)} \cap C = \emptyset$,

vagyis ha $0 < r < \frac{1}{m}$, akkor $B_r(z) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{m}}(z)}$, tehát $B_r(z) \cap C = \emptyset$, ami pedig ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz nyílt fedése, vagyis minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Jelölje J az I

halmaz nem üres, véges részhalmazainak a halmazát, vagyis $J = \{j \subseteq I \mid j \neq \emptyset, j \text{ véges}\}$, valamint minden $j \in J$ esetén legyen $B_j = C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i$. Ekkor minden $j \in J$ esetén B_j korlátos zárt halmaz,

valamint minden $j_1, j_2 \in J$ elemhez létezik olyan $j' \in J$, melyre $B_{j'} \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$ teljesül. Ha egyik B_j halmaz sem lenne üres, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\emptyset \neq \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} \left(C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i \right) = C \setminus \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in j} A_i = C \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$$

teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz fedése. Tehát létezik olyan $j \in J$, melyre $B_j = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq \bigcup_{i \in j} A_i$, vagyis a C halmaznak létezik véges fedése.

Megjegyzés. A Cantor-féle közösrész-tétel ezek után úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbb{R}$ egymásba ágyazott, nem üres, kompakt részhalmazainak a metszete nem üres.



4. Sorozatok

4.1. A határérték és tulajdonágai

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow \varepsilon < a_n).$$

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow -\varepsilon > a_n).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Tétel. Ha $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \frac{|x - y|}{2}$ és $|a_n - y| < \frac{|x - y|}{2}$. Amiből az

$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y|$$

ellentmondás adódik.

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

4.4. Definíció. (*A lim művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.5. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*, ha $\text{Ran } a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot az a sorozat *részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *monoton növekvő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

4.6. Tétel. Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat és legyen $A = \lim a$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^N \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, a $\text{Ran } a$ halmaz is korlátos.

4.7. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n > N$ számra $|a_{\sigma(n)} - \lim a| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

4.8. Tétel. *Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő korlátos sorozat és legyen $A = \sup \text{Ran } a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növekvő, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \text{Ran } a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

4.9. Tétel. *Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos sorozat, $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zérussorozat és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor minden $n > N$ számra

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot |b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

4.10. Tétel. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
2. *A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.*
3. *Az ab sorozat konvergens és $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.*
4. *Az $\bar{a}$ sorozat konvergens és $\lim \bar{a} = \overline{\lim a}$.*
5. *Az $|a|$ sorozat konvergens és $\lim |a| = |\lim a|$.*
6. *Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\frac{1}{a}$ sorozat konvergens és $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$.*

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, az $A = \lim a$ és $B = \lim b$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $\lambda = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $n > N_a$ számra

$$|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

3. Mivel az a sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Ha $B = 0$, akkor az előző állítás szerint egy korlátos és egy zérussorozat szorzata zérussorozat. Tehát elég a $B \neq 0$ esetet vizsgálni. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ és legyen $N_b \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_b$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$|\overline{a_n} - \overline{A}| = |\overline{(a_n - A)}| = |a_n - A| < \varepsilon.$$

5. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

6. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Ekkor minden $n > N_1$ számra $|a_n| > \frac{|A|}{2}$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon |A|^2}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_1, N_a\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{|a_n - A|}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} < \frac{2}{|A|^2} \cdot \frac{\varepsilon |A|^2}{2} = \varepsilon.$$

4.11. Tétel. Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra $\lim |a| = 0$ teljesül, akkor $\lim a = 0$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\lim |a| = 0$ tulajdonság miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$|a| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a $\lim a = 0$ tulajdonságot fejezi ki.

4.12. Tétel. Ha az $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozatra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a \leq \lim b$.

Bizonyítás. Legyen $A = \lim a$, $B = \lim b$ és tegyük fel, hogy $B < A$. Az $\varepsilon = \frac{A - B}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|b_n - B| < \varepsilon$. Vagyis $n > N$ esetén az $A - \varepsilon < a_n$ egyenlőtlenség miatt $\frac{A + B}{2} < a_n$, és a $b_n < B + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $b_n < \frac{A + B}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $a_n \leq b_n$.

4.13. Tétel. (Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens és $\lim b = x$.

Bizonyítás. Bevezetve az $\alpha = b - a$ és a $\beta = c - a$ sorozatokat, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ teljesül. A $\lim \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha_n| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim \alpha = 0$. Ekkor a $b = \alpha + a$ sorozat is konvergens és $\lim b = \lim \alpha + \lim a = x$.

4.14. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az

$$a^p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n^p$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^p = (\lim a)^p$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 2|A|$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\begin{aligned} |A^p - a_n^p| &= |A - a_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{p-1} A^k a_n^{p-1-k} \right| \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k |a_n|^{p-1-k} < \\ &< |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k (2|A|)^{p-1-k} \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^{p-1} 2^{p-1} \leq \\ &\leq |A - a_n| \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1}. \end{aligned}$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{p |A|^{p-1} 2^{p-1}}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|A^p - a_n^p| < |A - a_n| \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1} < \frac{\varepsilon}{p |A|^{p-1} 2^{p-1}} \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = A^p$.

Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 1$ teljesül, valamint létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra $|a_n| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$|a_n|^p \leq |a_n| < \varepsilon,$$

vagyis $\lim a^p = 0$.

4.15. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto \sqrt[p]{a_n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $a_n > \frac{A}{2}$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\left| \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n} \right| = \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} a_n^{\frac{p-1-k}{p}}} \leq \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{p-1-k}{p}}} <$$

$$< \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |A - a_n|.$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2}.$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n} \right| < |A - a_n| \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2} \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{A}$.

Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n < \varepsilon^p$ teljesül. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon,$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = 0$.

4.16. Tétel. (Sorozatok racionális hatványai.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az

$$a^q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto a_n^q$$

sorozat konvergens és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha } \lim a > 0 \vee q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha } \lim a = 0 \wedge q < 0 \end{cases}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat, $A = \lim a$ és $q \in \mathbb{Q}$. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.

Ha $q > 0$, akkor létezik olyan $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, melyre $q = \frac{p_1}{p_2}$. Ekkor a 4.16 és a 4.15 tételből következik az állítás.

Ha $q < 0$, akkor a 4.10 tétel segítségével visszavezethető a $q > 0$ esetre az állítás.

4.2. Topologiai fogalmak jellemzése sorozatokkal

4.17. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.

1. Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.
2. Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatra $\lim a \in A$.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.

1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset.$$

Az 1.30 tétel alapján

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset,$$

legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n - x| < \frac{1}{n+1}$.

Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - x| < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Mivel α eleme a nyílt $\mathbb{R} \setminus A$ halmaznak, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(\alpha) \subseteq (\mathbb{R} \setminus A)$, amiből $B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ adódik. Az a sorozat konvergenciája miatt viszont az r számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a_n \in B_r(\alpha)$. Ekkor viszont az $a_{N+1} \in B_r(\alpha) \cap A = \emptyset$ ellentmondás adódik.

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárási definíciója alapján ekkor α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

4.18. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$. Az $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a 3.18 Cantor-tétel feltételei, ezért $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Defináljuk a $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \wedge a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x) \right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x .

Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ sorozat, akkor a $\operatorname{Re} \circ a$ valós sorozathoz létezik olyan σ_1 indexsorozat, hogy $\operatorname{Re} \circ a \circ \sigma_1$ konvergens; és az $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1$ valós sorozathoz létezik olyan σ_2 indexsorozat, hogy $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ konvergens. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozatra az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens lesz.

4.19. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \rightarrow A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ tetszőleges sorozat. Mivel az a sorozat korlátos, ezért létezik a' konvergens részsorozata. Ekkor $\lim a' \in \overline{A}$, vagyis az A halmaz zártságára miatt $\lim a' \in A$.

Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \rightarrow A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül. Megmutatjuk, hogy az A halmaz korlátos és zárt.

Ha az A halmaz nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \setminus B_{n+1}(0) \neq \emptyset$, ezért az 1.30 tétel miatt

$\prod_{n \in \mathbb{N}} (A \setminus B_{n+1}(0)) \neq \emptyset$. Ha $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat. Ha a' ennek tetszőleges részsorozata, akkor $|a'_n| \geq n$, vagyis az a' sorozat nem korlátos, így konvergens sem lehet. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata, tehát ellentmondásra jutottunk. Ha az A halmaz nem zárt, akkor létezik $x \in \overline{A} \setminus A$ elem. A lezárt definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A \neq \emptyset$, ezért az 1.30 tétel miatt

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_{\frac{1}{n+1}}(x)) \neq \emptyset.$$

Ha $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} (B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A)$, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat. Legyen a' az a tetszőleges részsorozata. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a'_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$, ezért $\lim a' = x \notin A$ teljesül. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata melynek a határértéke az A halmazban lenne, tehát ellentmondásra jutottunk.

4.3. Limesz inferior és superior

4.20. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right)$$

és *limesz superiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right).$$

4.21. Tétel. Minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\limsup a < \liminf a$ és legyen $q \in]\limsup a, \liminf a[$. Ekkor a $\limsup$ és a $\liminf$ definíciója alapján léteznek olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n_1} a_k < q < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n_2} a_k,$$

vagyis minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ számra az

$$a_n < q < a_n$$

ellentmondást kapjuk.

4.22. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat.

1. Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.
2. Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ és $\liminf a = \limsup a$, akkor az a sorozat konvergens és $\lim a = \liminf a$ teljesül.

Bizonyítás. 1. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

teljesül. Ezért

$$A - \varepsilon \leq \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N+1} a_k \right) \leq \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N+1} a_k \right) \leq A + \varepsilon,$$

amiből pedig a 4.21 tétel felhasználásával

$$A - \varepsilon \leq \liminf a \leq \limsup a \leq A + \varepsilon$$

adódik. Ezek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a $\liminf a, \limsup a \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, tehát

$$\liminf a = \limsup a = A.$$

2. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\liminf a = \limsup a \in \mathbb{R}$. Legyen $A = \liminf a$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel feltételezésünk szerint

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right) = A = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right),$$

ezért

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_1} a_k$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : A + \varepsilon > \sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_2} a_k.$$

Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra az

$$A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_1} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_2} a_k < A + \varepsilon$$

egyenlőtlenségek alapján $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ adódik.

4.4. Cauchy-sorozatok

4.23. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \wedge N < m) \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

4.24. Tétel. Minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N$ számra $|a_n - a_m| < 1$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a$ véges sok korlátos halmaz uniója, így korlátos.

4.25. Tétel. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat határértéke A és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $n, m > N$ esetén

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.26. Tétel. Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N_1$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_2$ esetén $|a_{\sigma(n)} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{\sigma(n)}) + (a_{\sigma(n)} - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

4.27. Tétel. (Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, akkor a 4.24 tétel alapján az a sorozat korlátos és a 4.19 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, amiből a 4.26 előző állítás alapján a konvergenciája adódik.

Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, akkor a 4.25 tétel alapján Cauchy-sorozat.

4.5. Nevezetes határértékek

4.28. Tétel. Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1 & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0 & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 0$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.53 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\alpha]{\varepsilon} < N + 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq n^\alpha,$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty$.

Ha $\alpha = 0$, akkor nyilvánvalóan $\lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Ha $\alpha < 0$, akkor a $\beta = -\alpha$ számra $\beta > 0$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.53 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\beta]{\frac{1}{\varepsilon}} < N \cdot 1.$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\left| \frac{1}{n^\beta} \right| \leq \varepsilon,$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$.

4.29. Tétel. Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1, \\ 1 & \text{ha } q = 1, \\ 0 & \text{ha } -1 < q < 1, \end{cases}$$

és $q \leq -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $q > 1$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = q - 1 > 0$ mennyiséget. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.53 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\frac{\varepsilon - 1}{a} < N \cdot 1.$$

Ebből és a 2.1 Bernoulli-egyenlőtlenségből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq 1 + na \leq (1 + a)^n = q^n,$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

A $q = 1$ és a $q = 0$ esetekben nyilvánvalóan teljesül az állítás.

Legyen $q \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ mennyiséget. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n},$$

amiből a 4.13 rendőr-elv és a 4.28 tétel alapján adódik a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ határérték.

Legyen $q \leq -1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|q^n - q^{n+1}| \geq 1$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

4.30. Tétel. Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Bizonyítás. Ha $q = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $q > 1$ és tekintsük az $a_n = \sqrt[n]{q} - 1$ sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > 0$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

amiből

$$0 \leq a_n \leq \frac{q - 1}{n}$$

adódik. Ebből a rendőr-elv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, és így $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$ következik.

Ha $q < 1$, akkor tekintsük a $q' = \frac{1}{q}$ számot. Ekkor az előző eredmény alapján.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q'}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q'}} = 1$$

4.31. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot (1)^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}.$$

Ebből a 4.13 rendőrelv alapján adódik a bizonyítandó állítás.

4.32. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Defináljuk az $N_1 = 2([\varepsilon] + 1)$ és az $\alpha = \frac{N_1!}{\varepsilon^{N_1}}$ számot. Ha $n > N_1$ természetes szám, akkor

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} = \alpha \cdot \prod_{k=1}^{n-N_1} \frac{k + N_1}{\varepsilon} > \alpha \cdot 2^{n-N_1} = \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n.$$

Mivel a 4.29 tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$2^n > \frac{2^{N_1}}{\alpha}$$

teljesül. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot \frac{2^{N_1}}{\alpha} = 1$$

teljesül, vagyis

$$\sqrt[n]{n!} > \varepsilon.$$

4.33. Tétel. (Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ teljesül, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < q \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$0 < |a_{N+k}| < q^k \cdot |a_N|.$$

Amiből a $k \rightarrow \infty$ határérték képzéssel a rendőrelv alapján $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{N+k}| = 0$ következik, ebből pedig $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$ adódik.

4.34. Tétel. Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$.

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = n^p q^n$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q| \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = |q| < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.16 tételt. A fenti egyenlőtlenségből pedig a sorozatokra vonatkozó 4.33 hányados-kritérium alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ következik.

4.35. Tétel. Minden $q \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$ és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \frac{q^n}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|}{n+1} = 0 < 1$$

adódik, amiből a sorozatokra vonatkozó 4.33 hányados-kritérium alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ következik.

4.36. Tétel. Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Az $\alpha < 0$ esetben a 4.29 tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$ és a minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennálló

$$0 \leq \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségre alkalmazva a rendőrléve elvet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ adódik, tehát ezen két sorozat szorzatára szintén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$ adódik.

Tehát elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \frac{n^\alpha}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 0 \cdot 1 = 0 < 1$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 4.16 tételt. A sorozatokra vonatkozó 4.33 hányados-kritérium alapján ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

4.37. Tétel. (Napier állandó.)

1. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat korlátos, monoton növekvő, tehát konvergens.

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

konvergens.

3. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. A $z_1 = \dots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = 1$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{n \left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

adódik, amiből hatványozással $a_n \leq a_{n+1}$ következik.

Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét, tehát azt a jól meghatározott egész számot melyre $[x] \leq x$ és $[x] + 1 > x$. Az $z_1 = \dots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = \dots = z_{n+[x]+1} = 1 - \frac{x}{[x]+1}$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\sqrt[n+[x]+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}} \leq \frac{n \left(1 + \frac{x}{n}\right) + ([x]+1) \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)}{n+[x]+1} =$$

$$= \frac{n + x + [x] + 1 - x}{n + [x] + 1} = 1$$

adódik, amiből hatványozással

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \leq 1$$

következik. Ennek átrendezése adja a sorozat korlátosságát bizonyító

$$a_n \leq \left(1 - \frac{x}{[x] + 1}\right)^{-[x] - 1}$$

egyenlőtlenséget. Ezek alapján az a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, vagyis konvergens.

2. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Mivel $[x] \leq x < [x] + 1$, ezért $0 < [x] + 1 - x \leq 1$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x}{n + 1} \leq \frac{x}{n + [x] + 1 - x} < \frac{x}{n}.$$

Ebből

$$\left(1 + \frac{x}{n + 1}\right)^{n + 1} \cdot \left(1 + \frac{x}{n + 1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

adódik, tehát a rendőrlv alapján a

$$\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^{-[x] - 1} = 1,$$

ezért a

$$c : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^{n + [x] + 1}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

A minden $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{x\}$ számra érvényes

$$b_n = \left(\frac{n - x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n - x}\right)^n\right)^{-1}$$

átalakításból azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $b_{n + [x] + 1} = c_n^{-1}$. Mivel a c sorozat konvergens és $\lim c \neq 0$ (hiszen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_1 \leq c_n$), ezért a b sorozat is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right)^{-1}. \quad (4.1)$$

3. A (4.1) egyenlet jelenti a bizonyítandó egyenlőséget.

4.38. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Bizonyítás. Tekintsük a $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $b_n = \frac{n!}{n^n}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

A 4.37 tételben definiált $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$ teljesül, hiszen a sorozat monoton növekvő és $a_1 = 2 > 1$. Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1$$

adódik. A sorozatokra vonatkozó 4.33 hányados-kritérium alapján ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

5. Sorok

5.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

5.1. Definíció. (Sorok.)

- Adott $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^n a_i$ definiál, az a sorozathoz rendelt sornak vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Tétel. Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor és $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. A $\sum \bar{a}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Mivel az α és a β sorozat konvergens, ezért összegük, számszorosuk és konjugáltjuk is konvergens lesz. Továbbá a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (c\alpha_n) &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_n &= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}\end{aligned}$$

egyenlőségek teljesülnek.

5.3. Tétel. (A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor $\lim a = 0$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Ekkor az $n \rightarrow \alpha_n$ és az $n \rightarrow \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergens, és határértékük megegyezik. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

5.4. Tétel. (Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \rightarrow \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. A sorozatokra vonatkozó 4.26 Cauchy-kritérium alapján az $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n < m) \rightarrow |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon)$$

teljesül.

5.5. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat. Ha a sor konvergens, akkor

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \rightarrow \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Tegyük fel, hogy a sor konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, vagyis Cauchy-sorozat. Ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N + 1 < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$|\alpha_m - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$$

teljesül, amiből az $m \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$|\lim \alpha - \alpha_{n-1}| \leq \varepsilon$$

adódik, amiből a

$$\lim \alpha - \alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

átalakítással adódik az állítás.

5.2. Majoráns és minoráns kritérium

5.6. Tétel. (Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.

1. Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$ és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$ és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növekvő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens és monoton növekvő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

5.7. Tétel. A $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergens, a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergenciája.

2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor felülről korlátos és monoton növekvő, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

becslés is adódik.

5.3. Abszolút konvergens sorok

5.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.9. Tétel. Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is és

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a belőle képzett $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Megmutatjuk, hogy az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, így a 4.27 Cauchy-kritérium alapján konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex,

hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^n |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

Ezek alapján minden $n, m > N$ természetes számra

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat.

5.10. Tétel. Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_n q^n$ sor

1. *divergens*, ha $|q| \geq 1$;
2. *abszolút konvergens*, ha $|q| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ha $|q| \geq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat nem tart a nullához, vagyis $\sum_n q^n$

sor az 5.3 konvergencia szükséges feltétele alapján a nem lehet konvergens.

Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

teljesül, valamint a 4.29 tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \rightarrow \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

adódik.

5.4. Konvergenciakritériumok

5.11. Tétel. (Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha $a \sum_n a_n$ és $a \sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta(n) = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$. Az a sorozat monoton csökkenése miatt az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\begin{aligned} \alpha(2^n - 1) &= a_0 + \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leq \\ &\leq a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \beta(n-1) \\ \alpha(2^n) &= a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{2^n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+j} \geq \\ &\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k+2^k} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \beta(n) \end{aligned}$$

Tekintsük az $n \mapsto \alpha(n)$ és $n \mapsto \beta(n)$ monoton növekvő sorozatokat. A fenti becslés azt mutatja, hogy ha az egyik nem korlátos, akkor a másik sem az. Vagyis ha az egyik sor divergens, akkor a másik is. Ebből pedig következik, hogy ha egyik sor konvergens, akkor a másik is.

Kiegészítés. A kondenzációs kritérium általánosabb formában is igaz.

5.12. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ekkor ha $\sum_n a_n$ és $\sum_n p^n a_{p^n}$ sorok közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.

◇

5.13. Tétel. Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.

Bizonyítás. Az 5.11 kondenzációs kritérium alapján a $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^q}$ sor konvergens. Ezt a sort a $\sum_n \left(\frac{1}{2^{q-1}} \right)^n$ alakban lehet felírni, ami a $\frac{1}{2^{q-1}}$ hányadosú geometriai sor összege. A geometriai sor konvergenciájára vonatkozó 5.10 tétel alapján, ez pontosan akkor konvergens, ha $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ teljesül, ez pedig a $q > 1$ feltétellel ekvivalens.

5.14. Tétel. (*Cauchy-féle gyökkritérium.*) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás. 1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Ekkor a $\limsup$ definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N}, k > N \right\} < q$, ezért minden $k > N$ számra $|a(k)| < q^k$. A $\sum_k q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0, 1[$, ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.

2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$. Ekkor a $\limsup$ definíciója alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N}, k > N \right\} > q$. Tehát minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan $k > N$, melyre $|a_k| > q^k$. Defináljuk a $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

– Legyen $\sigma(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |a_k| > q^0\}$.

– Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \wedge |a_k| > q^{n+1}\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ nem korlátos részsorozata az a sorozatnak. Ezek alapján az a sorozat sem korlátos, ezért konvergens sem lehet, emiatt pedig a $\sum a$ sor sem lehet konvergens.

5.15. Tétel. Minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozatra

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ tetszőleges sorozat.

1. Legyen $\alpha < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tetszőleges való szám. Ekkor a $\liminf$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\inf \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ teljesül.

Tehát

$$|a_{N+1}| > \alpha \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| > \alpha^k \cdot |a_N|.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \rightarrow \quad \alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. A 4.21 tétel szerint minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozatra teljesül az

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

egyenlőtlenség.

3. Legyen $\alpha > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tetszőleges valós szám. Ekkor a $\limsup$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \inf_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N \right\} \right)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha > \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ teljesül.

Tehát

$$|a_{N+1}| < \alpha \cdot |a_N|.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| < \alpha^k \cdot |a_N|.$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}.$$

Amiből

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \rightarrow \quad \alpha \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

következtetés, ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

5.16. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ olyan, melyre létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}$ határérték. Ekkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Bizonyítás. Az előző 5.15 állítás és a 4.22 tétel alapján nyilvánvaló.

5.17. Tétel. (D'Alembert-féle hányadoskritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozat esetén

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás. Az 5.14 Cauchy-féle gyökkritérium és az 5.15 tétel alapján nyilvánvaló.

5.5. Leibniz-sorok

5.18. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.19. Tétel. Ha $\sum_n (-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|H_n| \leq a_{n+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\begin{aligned} \alpha(2n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2n} \geq 0 \\ \alpha(2n+1) &= a_0 + \sum_{k=1}^n (-a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2n+1} \leq a_0 \\ \alpha(2(n+1)) &= \alpha(2n) - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq \alpha(2n) \\ \alpha(2(n+1)+1) &= \alpha(2n+1) + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq \alpha(2n+1) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek alapján az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, ezért konvergens, valamint az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat felülről korlátos és monoton növekvő, ezért szintén konvergens. A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(2n+1) - \alpha(2n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -a_{2n+1} = 0$$

határérték alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(2n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(2n)$, vagyis létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n)$ határérték. Legyen

$A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Mivel az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat monoton csökkenő és az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat monoton növekvő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\alpha(2n+1) \leq A \leq \alpha(2n),$$

ezért

$$\begin{aligned} 0 \leq A - \alpha(2n+1) &\leq \alpha(2n+2) - \alpha(2n+1) = a_{2n+2} & \rightarrow & |A - \alpha(2n+1)| \leq a_{2n+2}, \\ 0 \geq A - \alpha(2n) &\geq \alpha(2n+1) - \alpha(2n) = -a_{2n+1} & \rightarrow & |A - \alpha(2n)| \leq a_{2n+1}, \end{aligned}$$

ami bizonyítja a hibatagra vonatkozó $|H_n| \leq a_n$ becslést.

5.6. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok

5.20. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n -edik tagja $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.21. Tétel. Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges abszolút konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Továbbá vezessük be az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jelöléseket. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen $n' = \max \{ \sigma(k) \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$, ekkor

$$\sum_{k=0}^n |a \circ \sigma| = \sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{l=0}^{n'} |a_l| \leq B.$$

Ezért az $n \mapsto \sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}|$ sorozat felülről korlátos és monoton növekvő, tehát konvergens. Vagyis a $\sum a \circ \sigma$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens.

Megmutatjuk, hogy $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon_1.$$

Ekkor az $N_2 = \max \{ \sigma^{-1}(k) \mid k \in \{0, \dots, N_1\} \}$ számra igaz, hogy minden $n > N_2$ esetén

$$\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) \leq N_1}} a_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{N_1+1} a_k + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)},$$

vagyis

$$\begin{aligned} \left| A - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| &= \left| A - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} \right| \leq \left| \sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k \right| + \left| \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Tehát a ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex (például a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ választáshoz kapott N_2 paraméter), hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A$ egyenlőséget.

5.7. Sorok Cauchy-szorzata

5.22. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

5.23. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.24. Tétel. (Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(a * b)$ sor is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, valamint legyen C olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| < C$ teljesül. Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\sum_{k=0}^n (a * b)(k) - AB = \left(\sum_{j=0}^n a_j - A \right) B + \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right). \quad (5.1)$$

A jobb oldal első tagja nullához tart. Megmutatjuk, hogy a második tag is a nullához tart. Minden $\varepsilon' > 0$ számhoz létezik $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $\left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| < \varepsilon'$; valamint létezik $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon'$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n > 2N$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right) \right| &\leq \sum_{j=0}^N |a_j| \left| \sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right| + \sum_{j=N+1}^n |a_j| \left| \sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^N |a_j| \varepsilon' + \sum_{j=N+1}^n |a_j| C \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| + C \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon' A_a + C \varepsilon' = (C + A_a) \varepsilon'. \end{aligned}$$

Vagyis tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(C + A_a)}$ és az ehhez választott N_1 és N_2 paraméterekhez tartozó $N' = 2 \max\{N_1, N_2\}$ küszöbindex olyan lesz, hogy minden $n > N'$ számra

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right) \right| < \varepsilon,$$

vagyis a (5.1) képlet jobb oldalán lévő második tag is a nullához tart.

Most tegyük fel, hogy $\sum a$ és $\sum b$ is abszolút konvergens és az eddigi jelöléseket egészítsük ki a $B_a = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ szimbólummal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |a * b|(k) &= \sum_{k=0}^n \left| \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k |a_l| |b_{k-l}| = \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{l=0}^{n-k} |b_l| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = \sum_{k=0}^n |a_k| B_a \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) B_a = A_a B_a, \end{aligned}$$

vagyis a $\sum(a * b)$ sor abszolút konvergens.

5.8. Sorok pontonkénti szorzata

5.25. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat

– *korlátos változású*, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

teljesül;

– *korlátos részletösszegű*, ha a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| < \infty$$

teljesül.

5.26. Tétel. (Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens és

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right),$$

valamint legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat és

$$B = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n b_k \right|.$$

A minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennálló *Abel-átrendezés*

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right) + a_n \sum_{j=0}^n b_j$$

igazolható n szerinti teljes indukcióval. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \left| \sum_{j=0}^k b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot B = AB,$$

ezért a $\sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right)$ sor abszolút konvergens, vagyis konvergens is és

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right) \right| \leq AB.$$

Az $n \mapsto a_n \sum_{j=0}^n b_j$ sorozat zérussorozat, mert az $n \mapsto \sum_{j=0}^n b_j$ sorozat korlátos és a zérussorozat. Ebből már adódik a bizonyítandó állítás.

5.9. Elemi függvények

5.27. Definíció. (Elemi hatványsorok.)

- Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\text{Dom } P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{a } \sum_n a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \text{Dom } P_a \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt az a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak nevezzük.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

5.28. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{R}$.

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \text{Dom } P_a$.
2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \text{Dom } P_a$.

Bizonyítás. Az 5.14 Cauchy-féle gyökkritérium közvetlen következménye.

5.29. Tétel. Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.

$$\begin{array}{ccc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{array}$$

5.30. Definíció. (Elemi függvények.)

- Az exponenciális függvény

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- A szinusz függvény

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- A koszinusz függvény

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

- A tangens függvény

$$\text{tg} : \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

- A kotangens függvény

$$\text{ctg} : \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \sin z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\text{tg } z}.$$

– A szinusz hiperbolikus függvény

$$\operatorname{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A koszinusz hiperbolikus függvény

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A tangens hiperbolikus függvény

$$\operatorname{th} : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

– A kotangens hiperbolikus függvény

$$\operatorname{cth} : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} z}.$$

5.31. Tétel. (Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \cos z + i \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + i \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - i \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4n}}{(4n)!} + \frac{(iz)^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(iz)^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(iz)^{4n+3}}{(4n+3)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \exp(iz). \end{aligned}$$

5.10. Az exponenciális függvény és a hatványozás

5.32. Tétel. (Az exponenciális függvény.)

1. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$.
2. Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
3. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.
4. Minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ számra $x_1 < x_2$ esetén $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ teljesül, vagyis az

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$$

függvény injektív.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{C}$ és $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Mivel az a sorozat konvergens, ezért

$$\overline{\exp(x)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\overline{x})^k}{k!} = \exp(\overline{x}).$$

2. Mivel a $\alpha_k = \frac{x^k}{k!}$ és $\beta_k = \frac{y^k}{k!}$ sorozatokból képzett sorok abszolút konvergensek, ezért Mertens-tétel alapján Cauchy-szorzatuk is konvergens lesz. Mivel

$$(\alpha * \beta)(n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

3. Az előző pont alapján minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

4. Az exponenciális függvény definíciója alapján ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(a) > 1$. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$, akkor

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1) > \exp(x_1).$$

5.33. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele $\log$ vagy $\ln$. Tehát $\text{Dom log} = \text{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x \in \text{Dom log}$ számra $\exp(\log x) = x$.

Megjegyzés. Később igazoljuk, hogy $\text{Dom log} = \mathbb{R}^+$.

◇

5.34. Definíció. Legyen $x \in \text{Dom log}$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z \log(x))$$

számot az x szám z -edik hatványának nevezzük.

5.35. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $e \triangleq \exp(1)$. (értéke megközelítőleg $e \approx 2,71828182845904523536$.)

5.36. Tétel. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $\exp(z) = e^z$.

Bizonyítás. Az e szám és a hatványozás definíciója alapján nyilvánvaló.

5.37. Tétel. Legyen $x, y \in \text{Dom log}$ olyan szám, melyre $x^y \in \text{Dom log}$ és legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$x^0 = 1, \quad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \quad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \quad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítások a hatványozás definíciójának és az exponenciális függvény multiplikativitásának közvetlen következményei.

5.38. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.

Bizonyítás. Adott $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n =$

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \text{ sorozatokat.}$$

1. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a 4.37 tétel alapján az $a(x)$ sorozat konvergens, valamint az 5.29

tétel alapján a $b(x)$ sorozat konvergencia és definíció szerint $\lim b(x) = \exp x$. A binomiális kifejtés alapján

$$b(x)_n - a(x)_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right) \cdot \frac{x^k}{k!}.$$

A teljes indukcióval könnyen bizonyítható $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ formula és a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \geq 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Ezek alapján

$$1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \leq \frac{k(k-1)}{2n},$$

vagyis

$$0 \leq b(x)_n - a(x)_n \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n} \cdot x^2 \exp x,$$

amiből a rendőrelv értelmében $\lim(b(x) - a(x)) = 0$ következik.

2. Ha $x < 0$, akkor a 4.37 tétel miatt $\lim a(x) = \frac{1}{\lim a(-x)}$, az 5.32 tétel miatt $\lim b(x) = \frac{1}{\lim b(-x)}$. Mivel ekkor $-x > 0$, ezért az 1. pont alapján

$$\lim a(-x) = \lim b(-x),$$

amiből $\lim a(x) = \lim b(x)$ következik.

5.39. Tétel. (Elemi függvények alaptulajdonságai.)

1. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

2. Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

3. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x.$$

4. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

5. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|e^{ix}| = 1$.

Bizonyítás. Az 5.31 Euler-tétel alapján minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{és} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos(x) = \cos(-x)$ és $\sin(x) = -\sin(-x)$. Ebből adódik a $\sin$ és $\cos$ függvényre vonatkozó egyenlőség.

Az sh és a ch függvényekre vonatkozó egyenlőség a függvények sorfejtésének közvetlen következménye. Az addíciós formulák illetve a többi azonosság egyszerű számolással igazolható a $\sin$, $\cos$, sh és ch függvény exponenciális alakjából.

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Függvények tulajdonságai

Magyarázat. A függvények főbb tulajdonságait definiáljuk először.

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha minden $x \in \text{Dom } f$ elemre $-x \in \text{Dom } f$ és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \text{Dom } f$ elemre $-x \in \text{Dom } f$ és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növekvő*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növekvő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növekvő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \text{Dom } f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

teljesül;

- *konkáv az $I \subseteq \text{Dom } f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \geq af(x) + (1 - a)f(y)$$

teljesül;

- *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $x + p \in \text{Dom } f$ és $f(x) = f(x + p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az f függvény periódusának nevezzük;
- *zérushelye vagy gyöke* $x \in \text{Dom } f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Tétel. (Jensen-egyenlőtlenség.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

2. Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Elég a konvex esetre bizonyítani az állítást, hiszen az $f \mapsto -f$ transzformációval egymásba alakíthatók az állítások. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} [0, 1]^n$ esetén, melyre $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ az

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor nyilván $n = 2$ is igaz a következtetés, ami éppen a konvexitás definícióját jelenti.

Tegyük fel, hogy az f függvény konvex és az A halmaz álljon azokból az n természetes számokból, melyre igaz, hogy minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

Nyilván $1 \in A$, az f függvény konvexitása miatt $2 \in A$ és célunk annak igazolása, hogy $A = \mathbb{N}^+$. Ezt úgy érjük el, hogy megmutatjuk ha $n \in A$, akkor $n+1 \in A$. Legyen $n \in A$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in I^n$ és legyen $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in [0, 1]^n$ olyan, melyre $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Ha $a_{n+1} = 1$, akkor nyilván teljesül az

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $a_{n+1} \neq 1$. Ebben az esetben azonban a

$$\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}} \in [0, 1]$$

számok összege 1, valamint

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i \in I.$$

Ezért felhasználva az f függvény konvexitását és az $n \in A$ feltételezést

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right) &= f\left((1-a_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i + a_{n+1} x_{n+1}\right) \leq \\ &\leq (1-a_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_{n+1}} x_i\right) + a_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq (1-a_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-a_{n+1}} f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i) \end{aligned}$$

adódik, vagyis $n+1 \in A$.

6.2. Függvény határértéke

6.3. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\text{Dom } f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)).$$

Magyarázat. A fenti definíció szerint az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $\text{Dom } f$ halmaz $a \in \mathbb{R}$ torlódási torlódási pontjában $A \in \mathbb{R}$ a határértéke pontosan akkor, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban végtelen, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty]).$$

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.5. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\text{Dom } f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az f függvény határértéke a végtelenben,

- $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f([\delta, \infty]) \subseteq B_\varepsilon(A)).$$

- *végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f([\delta, \infty]) \subseteq [\varepsilon, \infty]).$$

- *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.7. Tétel. (*A határérték egyértelmősége.*)

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.
2. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_A &\rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \\ 0 < |x - a| < \delta_B &\rightarrow |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \end{aligned}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = \infty$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke a végtelenben. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén

$$\begin{aligned} \delta_A < x &\rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \\ \delta_B < x &\rightarrow |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \end{aligned}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f) \cap]\delta, \infty[$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Ha $a = -\infty$, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $A = B$.

A többi esetben is hasonló módon igazolható a határérték egyértelmősége.

6.8. Definíció. (*A lim művelet.*)

- Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vagy $\lim_a f$ jelöli.
- Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vagy $\lim_a f$ jelöli.

6.9. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim_a f = 0$, akkor $\lim_a fg = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim_a f = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in \text{Dom } g \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ esetén $|g(x)| < K$. Mivel $\lim_a f = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f \cap (B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\})$ esetén $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ha $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } g \cap \text{Dom } f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$|f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

Vagyis $\lim_a (fg) = 0$.

6.10. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaznak. (Az a paraméter $\pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f$ és $\lim_a g$, valamint $\lim_a f, \lim_a g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont

1. torlódási pontja a $\text{Dom}(f + g)$ halmaznak, $\lim_a (f + g)$ létezik és

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g;$$

2. torlódási pontja a $\text{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim_a (fg)$ létezik és

$$\lim_a (fg) = \left(\lim_a f\right) \left(\lim_a g\right);$$

3. torlódási pontja a $\text{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim_a (\lambda f)$ létezik, és

$$\lim_a (\lambda f) = \lambda(\lim_a f);$$

4. torlódási pontja a $\text{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim_a |f|$ létezik és

$$\lim_a |f| = \left|\lim_a f\right|;$$

5. torlódási pontja a $\text{Dom}(\overline{f})$ halmaznak, $\lim_a \overline{f}$ létezik és

$$\lim_a \overline{f} = \overline{\lim_a f}.$$

6. Ha az a pont torlódási pontja a $\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)$ halmaznak és $\lim_a f \neq 0$, akkor $\lim_a \frac{1}{f}$ létezik és

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f}.$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $K = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaznak, legyen $F = \lim_a f \in \mathbb{R}$ és $G = \lim_a g$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (F + G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis $\lim_a (f + g) = F + G$.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - F| < k,$$

vagyis minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |F| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon'$$

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon'.$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (FG)| &= |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |G| \cdot |f(x) - F| \leq \\ &\leq (|F| + k) \cdot \varepsilon' + |G| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|F| + |G| + k) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|F| + |G| + k}$. Vagyis az ε, F, G és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk $\delta_1, \delta_f, \delta_g$ mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda F| = |\lambda| \cdot |f(x) - F| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

vagyis $\lim_a (\lambda f) = \lambda F$.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} ||f(x)| - |F|| &\leq |f(x) - F| < \varepsilon \\ \left| \overline{f(x)} - \overline{F} \right| &= \left| \overline{f(x) - F} \right| = |f(x) - F| \leq |f(x) - F| < \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\lim_a |f| = |F|$ és $\lim_a \overline{f} = \overline{F}$.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$. Ekkor minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \frac{|F|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon |F|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ és $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F} \right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)| \cdot |F|} < \frac{|f(x) - F|}{\frac{|F|}{2} \cdot |F|} < \frac{2}{|F|^2} \cdot \frac{\varepsilon |F|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.11. Tétel. Ha az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{Dom } f = \text{Dom } g$ és minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak és létezik a $\lim_a f, \lim_a g$ határérték, akkor $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\text{Dom } f = \text{Dom } g$ és vezessük be a $H = \text{Dom } f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x)$, valamint létezik a $\lim_a f, \lim_a g$ határérték. Legyen $F = \lim_a f, G = \lim_a g$ és tegyük fel, hogy $G < F$. Az $\varepsilon = \frac{F-G}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ esetén, ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-F| < \varepsilon$ és $|g(x)-G| < \varepsilon$. Vagyis $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén az $F - \varepsilon < f(x)$ egyenlőtlenség miatt $\frac{F+G}{2} < f(x)$, és a $g(x) < G + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $g(x) < \frac{F+G}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \leq g(x)$.

6.12. Tétel. (Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$ és minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_a f = \lim_a h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim_a g$ határérték és $\lim_a g = A$.

Bizonyítás. Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$ teljesül és vezessük be a $H = \text{Dom } f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint $A \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\lim_a f = \lim_a h = A$. Bevezetve az $\alpha = g - f$ és a $\beta = h - f$ függvényeket, minden $x \in H$ esetén $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ teljesül. A $\lim_a \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén $-\varepsilon < \beta(x) < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha(x)| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim_a \alpha = 0$. Ekkor a $g = \alpha + f$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban és $\lim_a g = \lim_a \alpha + \lim_a f = A$.

6.13. Tétel. (Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim_z f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_z f = F \in \mathbb{R}$ határérték és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$ a z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : 0 < |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - F| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = F$.

Most tegyük fel, hogy $\lim_z f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat, valamint

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\} \quad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim_z f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$ sorozat, melynek határértéke z . Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

6.3. Féloldali határérték

6.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

- Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \text{Dom } f$ halmaznak és az $f|_{]a, \infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a, \infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A és az A határértéket a $\lim_{a+} f$ vagy a $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.*

- Ha a torlódási pontja a $] -\infty, a[\cap \text{Dom } f$ halmaznak és az $f|_{] -\infty, a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{] -\infty, a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A és az A határértéket a $\lim_{a-} f$ vagy a $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.*

Magyarázat. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, A \in \mathbb{R}$. A fenti definíció szerint az f függvénynek a jobb oldali határértéke az a pontban A , pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap]a, \infty[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül. Hasonlóan, az f függvénynek a bal oldali határértéke az a pontban A , pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap] -\infty, a[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

6.15. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \text{Int Dom } f$. Pontosán akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke és $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$ és tegyük fel, hogy az a pontban létezik az f függvénynek határértéke. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor minden $x \in]a - \delta, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim_{a-} f$ és $\lim_{a-} f = \lim_a f$. Hasonlóan igazolható, hogy létezik $\lim_{a+} f$ és $\lim_{a+} f = \lim_a f$.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$ és tegyük fel, hogy az f függvénynek az a pontban létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$ teljesül. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta_1, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a-} f \right| < \varepsilon$$

teljesül és létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a+} f \right| < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $A = \lim_{a-} f = \lim_{a+} f$ olyan szám, hogy minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

vagyis létezik $\lim_a f$ határérték és $\lim_a f = A$.

6.4. Függvény folytonossága

6.16. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$.

– Az f *függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \right).$$

– Az f *függvény folytonos*, ha minden $a \in \text{Dom } f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{R}) \triangleq \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

6.17. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$, $c \in \mathbb{R}$. Ha az f és g *függvény folytonos az a pontban*, akkor az

$$f + g, fg, cf, |f|, \bar{f}$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ *függvény is folytonos az a pontban*.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in K = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$, $c \in \mathbb{R}$, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K : |x - a| < \delta_f &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall x \in K : |x - a| < \delta_g &\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min \{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $(f + g)$ *függvény folytonos az a pontban*.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < k,$$

vagyis minden $|x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |f(a)| + k.$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in K : |x - a| < \delta_f &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon' \\ \forall x \in K : |x - a| < \delta_g &\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ekkor a $\delta = \min \{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $|x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \leq \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \leq \\ &\leq (|f(a)| + k) \cdot \varepsilon' + |g(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|f(a)| + |g(a)| + k) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|f(a)| + |g(a)| + k}$. Vagyis az ε , $f(a)$, $g(a)$ és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd választunk δ_1 , δ_f , δ_g mennyiségeket és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. A $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $|x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

Vagyis a λf függvény folytonos az a pontban.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $|x - a| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned} ||f(x)| - |f(a)|| &\leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \left| \overline{f(x)} - \overline{f(a)} \right| &= \left| \overline{f(x) - f(a)} \right| = |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, vagyis az $|f|$ és a $\overline{f}$ függvény folytonos az a pontban.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $|x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$. Ekkor minden $|x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $|x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon |f(a)|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min \{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \text{Dom } \frac{1}{f}$ és $|x - a| < \delta$ esetén

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(x)| \cdot |f(a)|} < \frac{|f(x) - f(a)|}{\frac{|f(a)|}{2} \cdot |f(a)|} < \frac{2}{|f(a)|^2} \cdot \frac{\varepsilon |f(a)|^2}{2} = \varepsilon.$$

6.18. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{R})$ elemre és minden $c \in \mathbb{R}$ számra

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Az előző állítás kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

6.19. Tétel. Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $a \in \text{Dom } f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \text{Dom } g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \text{Dom } g \quad |y - f(a)| < \delta_g \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_g.$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

6.20. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik és $\lim_a f = f(a)$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Egymás alá írva a $\lim_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : \quad & 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : \quad & |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \text{Dom } f$ esetben a két formula ekvivalens.

6.21. Tétel. (Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a

1. $b \notin \text{Dom } g$;
 2. $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban;
- feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Először tegyük fel, hogy $b \notin \text{Dom } g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek és $g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) = g(B_{\delta'}(b))$ miatt

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

Most tegyük fel, hogy $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c).$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b).$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

6.22. Tétel. (Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \text{Dom } f$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \in \text{Dom } f$, tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az z pontban és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$, z ponthoz konvergáló sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(z)$.

Visszafelé úgy bizonyítjuk az implikációt hogy feltesszük, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)).$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset,$$

ezért

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozat, melynek határértéke z . Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - f(z)| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

6.23. Tétel. (A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap \text{Dom } f$ teljesül.
3. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $K = \text{Dom } f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in f^{-1}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_\delta(z) \subseteq f^{-1}(A)$ adódik.

Tehát az $U = \bigcup_{z \in f^{-1}(A)} B_\delta(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = f^{-1}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, hogy $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) \right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (U \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus U)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{R} \setminus U$ halmaz zárt és $f^{-1}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, hogy $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) \right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (Z \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus Z) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$$

teljesül, ahol ugyancsak felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{R} \setminus Z$ halmaz nyílt és $f^{-1}(A) = U \cap K$.

6.24. Tétel. *(A folytonosság topologikus jellemzése.)* Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra $f^{-1}(A)$ nyílt.
3. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazra $f^{-1}(A)$ zárt.

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

6.25. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban szakadása van, ha a függvény nem folytonos az a pontban.
- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van, ha létezik $\lim_{a \pm} f$, de $\lim_{a-} f \neq f(a)$ vagy $\lim_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van, ha létezik $\lim_{a \pm} f$ és $\lim_{a-} f = \lim_{a+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.5. Függvény folytonosságának elemi következményei

6.26. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

nyílt fedését. Ekkor a 6.23 folytonosság topologikus jellemzése alapján, minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i$$

teljesül, ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

6.27. Tétel. *(Weierstrass tétele.)* Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 6.26 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a valós számokra vonatkozó 3.21 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

6.28. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor a 6.26 tétel alapján a $K' = f(K)$ halmaz is kompakt. A 6.23 tétel felhasználásával úgy igazoljuk, hogy a $g = f^{-1}$ függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $g^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } g$ teljesül. Az f függvény injektivitása miatt $g^{-1}(A) = f(A)$. Az $A \cap K$ halmaz zárt és korlátos, ezért kompakt, valamint az f függvény folytonossága miatt $f(A \cap K)$ is kompakt halmaz, vagyis zárt. Legyen $Z = f(A \cap K)$. Mivel $\text{Dom } g = K'$ és $Z \subseteq K'$, ezért $g^{-1}(A) = f(A) = f(A \cap K) = Z \cap \text{Dom } g$.

6.29. Tétel. (Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen

$$H = \{z \in [a, b] \mid \forall x \in [a, z] : f(x) < 0\}.$$

Ekkor H korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma, legyen $c = \sup H$.

Megmutatjuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. Ha $c = a$, akkor az f függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $c = b$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]b - \delta, b[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak.

Végül igazoljuk, hogy $f(c) = 0$. Ha $f(c) < 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $f(c) > 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak. Mivel $f(c) > 0$ és $f(c) < 0$ is lehetetlen, ezért $f(c) = 0$.

6.30. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor $\text{Ran } f$ nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Szigorúan monoton csökkenő függvényre teljesen hasonló a bizonyítás.

Először megmutatjuk, hogy $\text{Ran } f$ intervallum. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in \text{Ran } f$ tetszőleges olyan pont, melyre $y_1 < y_2$. Legyen $x_1, x_2 \in I$ olyan, hogy $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - c$$

folytonos függvényre $h(x_1)h(x_2) < 0$ teljesül, tehát a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $x \in]x_1, x_2[$, hogy $f(x) = c$, vagyis $c \in \text{Ran } f$. Ezért minden $y_1, y_2 \in \text{Ran } f$, $y_1 < y_2$ esetén $[y_1, y_2] \subseteq \text{Ran } f$ teljesül, amiből már következik, hogy $\text{Ran } f$ intervallum.

Most megmutatjuk, hogy $\text{Ran } f$ nyílt halmaz. Ehhez legyen $y_0 \in \text{Ran } f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$. Mivel f szigorúan monoton növekvő, ezért $y_1 < y_0 < y_2$. Legyen $r = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Ekkor $B_r(y_0) \subseteq]y_1, y_2[$, és az előbbi megállapítás alapján $\text{Ran } f$ intervallum, ezért $B_r(y_0) \subseteq \text{Ran } f$, vagyis y_0 belső pontja a $\text{Ran } f$ halmaznak.

Végül megmutatjuk, hogy f^{-1} folytonos. Ehhez legyen $y_0 \in \text{Ran } f$ tetszőleges pont és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$.

Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ és tekintsük az

$$f|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow [y_1, y_2] \quad x \mapsto f(x)$$

függvényt. Mivel ez folytonos bijekció, ezért a 6.28 tétel alapján az inverze is folytonos. Mivel $y_0 \in \text{Int } [y_1, y_2] = \text{Int } \text{Dom } (f|_{[a,b]})^{-1}$, valamint $f^{-1}|_{[y_1, y_2]} = (f|_{[a,b]})^{-1}$ ezért az $f^{-1}|_{[y_1, y_2]}$ függvény is folytonos az y_0 pontban, vagyis az f^{-1} függvény is folytonos az y_0 pontban.

6.6. Függvény egyenletes folytonossága

6.31. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos* az A halmazon, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\text{Dom } f$ halmazon.

6.32. Tétel. Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \text{Dom } f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \text{Dom } f : (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \text{Dom } f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

6.33. Tétel. (Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f(B_{\delta(x)}(x)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x),$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x).$$

Legyen $\delta = \min \left\{ \frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H \right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A "háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|y - p| \leq |y - x| + |x - p| < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p),$$

ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon.$$

6.7. Hatványsorok határértéke

6.34. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim_{x \rightarrow z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.

6.8. Elemi függvények folytonossága

6.35. Tétel. Az $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg , ctg , sh , ch , th és cth függvény folytonos.

Bizonyítás. Az előző állítás és az 5.16 tétel miatt nyilvánvaló.

6.36. Tétel. (Nevezetes határértékek.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bizonyítás. Az exponenciális és a szinusz függvény hatványsorából adódik.

6.37. Tétel. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvényre $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ teljesül és a $\log$ függvényre pedig $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás. Csak a $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ állítást kell igazolni, hiszen a $\log$ függvény az $\exp$ függvény inverze. Legyen $a > 1$. Ekkor tekintsük a folytonos

$$\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x) - a$$

függvényt. Mivel $\varphi(0) = 1 - a < 0$ és $\varphi(a) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > a$ ezért a 6.29 Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x_0 \in [0, a]$ pont, melyre $\varphi(x_0) = 0$, vagyis $\exp(x_0) = a$ teljesül. Tehát $a \in \operatorname{Ran} \exp$. Ha $0 < a < 1$, akkor $1 < \frac{1}{a} \in \operatorname{Ran} \exp$, tehát létezik olyan x_0 , melyre $\exp(x_0) = \frac{1}{a}$. Mivel $\exp(-x_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = a$, ezért $a \in \operatorname{Ran} \exp$.

6.38. Tétel. (A logaritmus függvény.) A $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, szigorúan monoton növekvő bijektív függvény.

Bizonyítás. A 6.37 tétel alapján $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$, valamint mivel $\operatorname{Dom} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ és $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} = \log$, ezért $\operatorname{Ran} \log = \mathbb{R}$. Az 5.32 tétel alapján az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a $\log$ függvény is szigorúan monoton növekvő vagyis injektív függvény. Ezek alapján a $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény bijekció.

Mivel $\exp|_{\mathbb{R}}$ nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.30 tétel alapján az inverze is folytonos, vagyis a $\log$ függvény folytonos.

6.39. Tétel. (A hatványfüggvény folytonossága.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^{\alpha}$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, az

$$M_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \alpha x$$

és az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos, ezért az $\exp \circ M_{\alpha} \circ \log$ függvény is folytonos, ami pedig éppen az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha}$ függvény.

6.40. Tétel. (A π szám bevezetése.)

1. Minden $x \in]0, \sqrt{3}[$ esetén $\sin x > 0$.
2. A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $]0, \sqrt{3}[$ intervallumon.
3. $\cos \sqrt{3} < -\frac{1}{8}$
4. Létezik egyetlen olyan $x \in]0, \sqrt{3}[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in]0, \sqrt{3}[$, ekkor

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \dots = \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \dots \geq \\ &\geq x \left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{3}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{3}{10 \cdot 11}\right) + \dots \geq \\ &\geq x \left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{x}{2} > 0. \end{aligned}$$

2. Az 5.39 tételben szereplő addíciós formulák alapján minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right).$$

Tehát elég azt megmutatni, hogy az $x_1, x_2 \in]0, \sqrt{3}[$, $x_1 < x_2$ esetben $\sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ és $\sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Mivel $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} \in]0, \sqrt{3}[$, ezért az első pont alapján $\sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $\sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$.

3. A $\cos$ függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{3} &= 1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{4!} - \left(\frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!}\right) - \left(\frac{3^5}{10!} - \frac{3^6}{12!}\right) - \dots = \\ &= -\frac{1}{8} - \frac{3^3}{6!} \left(1 - \frac{3}{7 \cdot 8}\right) - \frac{3^5}{10!} \left(1 - \frac{3}{11 \cdot 12}\right) - \dots < -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

adódik.

4. A $\cos$ függvény folytonossága miatt a Bolzano-tétel alapján adódik, hogy létezik olyan $x \in]0, \sqrt{3}[$ szám, melyre $\cos x = 0$, valamint a $\cos$ függvény $[0, \sqrt{3}]$ intervallumon való szigorú monotonitásából adódik, hogy legfeljebb egy ilyen x szám létezhet ebben az intervallumban.

6.41. Definíció. Legyen $x \in]0, \sqrt{3}[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \triangleq 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük. (értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő számoláshoz hasonlóan igazolható, hogy $\cos \frac{3}{2} > 0$ és egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{3} < 1,74$. Tehát eddigi eredményeink alapján $3 < \pi < 3,48$ adódik. $\diamond$

6.9. Trigonometrikus függvények tulajdonságai

6.42. Tétel. (Nevezetes szögek.)

1. A $\frac{\pi}{2}$ és a π szögfüggvényei.

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \pi = -1 \quad \sin \pi = 0$$

2. Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin (x + \pi) &= -\sin x & \sin (x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos (x + \pi) &= -\cos x & \cos (x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

3. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{x+2\pi i} = e^x, \quad \operatorname{sh}(x + 2\pi i) = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(x + 2\pi i) = \operatorname{ch} x.$$

4. A $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{\pi}{3}$ szögfüggvényei.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bizonyítás. 1. A $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ a π szám definíciója alapján teljesül. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, 1\}$. A 6.40 tétel alapján $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, ezért $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. A $\sin \pi$ és a $\cos \pi$ érték az 5.39 tételben szereplő addíciós formulával igazolható.

2–3. Az egyenlőségek az 5.39 tételben szereplő addíciós formulákkal igazolhatók.

4. Legyen $a = \sin \frac{\pi}{6}$ és $b = \cos \frac{\pi}{6}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin \frac{2\pi}{6} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos \frac{2\pi}{6} = b^2 - a^2,$$

valamint

$$\sin \frac{3\pi}{6} = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad \cos \frac{3\pi}{6} = b^3 - 3a^2b.$$

A $\frac{\pi}{2}$ szinuszt és koszinuszt az 1. pont alapján beírva az

$$1 = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad 0 = b^3 - 3a^2b.$$

egyenletrendszer adódik. Ha a $b = 0$ teljesülne, akkor az első egyenlet alapján $a < 0$ teljesülne, azonban $\frac{\pi}{6} \in]0, \sqrt{3}[$, ezért a 6.40 tétel alapján $a > 0$. Tehát $b \neq 0$. A második egyenlet miatt ekkor $b^2 = 3a^2$, amit az első egyenletbe írva $1 = 8a^3$ adódik. Innen már a és b értéke egyszerűen számolható.

A $\sin \frac{\pi}{3}$ és a $\cos \frac{\pi}{3}$ értéke számolható a $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ összefüggésre alkalmazott addíciós formulákból.

Legyen $a = \sin \frac{\pi}{4}$ és $b = \cos \frac{\pi}{4}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin \frac{2\pi}{4} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos \frac{2\pi}{4} = b^2 - a^2,$$

tehát

$$1 = 2ab \quad \text{és} \quad 0 = b^2 - a^2.$$

Mivel $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4} > 0$, ezért a második egyenletből $a = b$ adódik, amiből pedig $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kiegészítés. A függelékben a nevezetes szögekről szóló 6.42 tétel bizonyításához hasonló gondolatmenettel igazoljuk még a

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

egyenlőséget (10.7 tétel) és megadjuk $\sin \frac{\pi}{17}$ és $\cos \frac{\pi}{17}$ értékét is. A következő tétel megmutatja, hogy mely α szögek esetén fejezhető ki $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$.

6.43. Definíció. Fermat-prímeknek nevezzük az $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) alakú prímszámokat.

Az eddig ismert Fermat-prímek: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ és $F_4 = 65537$. Nem ismert, hogy létezik-e ezeken kívül Fermat-prím.

6.44. Tétel. Pontosan azon $x \in \mathbb{R}$ számok esetén fejezhető ki $\sin x$ és $\cos x$ értéke az összeadás, a szorzás, az osztás és a négyzetgyökvonás műveletek véges kombinációjával, ha

$$x = \frac{m\pi}{2^n \cdot \prod_{i=0}^k F_i^{n_i}}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$, F_i az i -edik Fermat-prím és minden $i = 0, \dots, k$ esetén $n_i \in \{0, 1\}$. ◇

6.45. Tétel. (Euler képlet.) $e^{i\pi} = -1$

Bizonyítás. A 6.42 és az 5.31 Euler-tétel következménye.

6.46. Tétel. (Trigonometrikus függvények periódusa.)

1. Minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$, minden $x \in]\pi, 2\pi[$ esetén $\sin x < 0$.
2. A $\sin x = 0$ egyenletnek $x \in [0, 2\pi[$ esetén $x \in \{0, \pi\}$ az összes megoldása.
3. A $\sin$ függvény periódusa 2π .
4. Minden $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$, minden $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ esetén $\cos x < 0$.
5. A $\cos x = 0$ egyenletnek $x \in [0, 2\pi[$ esetén $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ az összes megoldása.
6. A $\cos$ függvény periódusa 2π .

Bizonyítás. 1. A 6.42 tétel alapján minden $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ számra $\sin x > 0$. Ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, akkor az előző megállapítás és a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt $\sin x > 0$. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0$, ezért minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$. Ha $x \in]\pi, 2\pi[$, akkor a $\sin x = -\sin(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\sin x < 0$.

2. Az 1. pont és a 6.42 tétel alapján nyilvánvaló.

3. Tegyük fel, hogy létezik a $\sin$ függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p . Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \sin 0 = \sin(0 + p)$. A 2. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban

$$1 = \sin \frac{\pi}{2} \neq \sin \left(\frac{\pi}{2} + p \right) = -1$$

miatt π sem lehet a periódus. Tehát a $\sin$ függvény legkisebb periódusa 2π .

4. A 6.42 tétel alapján minden $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$, továbbá a $\cos$ függvény párossága és $\cos 0 = 1$ miatt minden $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$. Ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, akkor a $\cos x = -\cos(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\cos x < 0$.

5. Az előző pont alapján ha $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, akkor $\cos x > 0$; ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, akkor $\cos x < 0$; ha $x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, akkor $\cos x = -\cos(x - \pi)$ miatt $\cos x > 0$. Tehát a $\cos x = 0$ egyenletnek a $[0, 2\pi[$

intervallumon csak $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ lehet a megoldása és a 6.42 tétel alapján ezek valóban megoldások.

6. Tegyük fel, hogy létezik a $\cos$ függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p . Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + p \right)$. A 4. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban $1 = \cos 0 \neq \cos(0 + p) = -1$ miatt π sem lehet a periódus. Tehát a $\cos$ függvény legkisebb periódusa 2π .

6.47. Tétel. Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.

1. A $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon és

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. A $\sin$ függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és

$$\sin \left|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \quad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. A tg függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ halmaz, valamint szigorúan monoton növekvő a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon és

$$\operatorname{tg} \left|_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Ha $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt a 6.46 tétel alapján $\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a $\cos$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ halmazon. Mivel $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ és a $\cos$ függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \cos|_{[0, \pi]} = [-1, 1].$$

A $\cos|_{[0, \pi]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

2. Ha $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ miatt a 6.46 tétel alapján $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt $\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\sin x_1 - \sin x_2 = -2 \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)$$

trigonometrikus azonosság alapján a $\sin$ függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon. Mivel $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a $\sin$ függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \sin \left|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = [-1, 1].$$

A $\sin \left|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

3. A $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásához legyen $z = a + ib$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A $\cos(a + ib) = 0$ egyenlet az 5.39 tétel alapján

$$e^{2ia - 2b} = -1$$

alakban íható fel, ami az 5.31 alapján az

$$e^{-2b} (\cos(2a) + i \sin(2a)) = -1$$

egyenlethez vezet. A két oldal abszolútértékét véve $e^{-2b} = 1$ adódik, vagyis $b = 0$. A fenti egyenlet valós és képzetes részét véve az

$$\cos(2a) = -1 \quad \sin(2a) = 0$$

egyenleteket kapjuk. Keressük ennek a megoldását a $2a \in [0, 2\pi[$ feltétel mellett. Ekkor a 6.46 tétel második pontja alapján a $\sin(2a) = 0$ egyenletből $2a = 0$ vagy $2a = \pi$ következik. A $2a = 0$ esetben $\cos(2a) \neq -1$, a $2a = \pi$ esetben azonban $\cos(2a) = -1$. Tehát a $[0, 2\pi[$ intervallumban egyetlen

megoldás van $a = \frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus függvények 2π szerinti periodicitása miatt a $\cos z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

vagyis $\text{Dom tg} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Legyen $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Ekkor $0 < x_2 - x_1 < \pi$, tehát a 6.46 tétel 1. pontja alapján $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\text{tg } x_1 - \text{tg } x_2 = \frac{-1}{\cos x_1 \cos x_2} \sin(x_2 - x_1)$$

trigonometrikus azonosság alapján a tg függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon.

A tg függvény páratlan és $\text{tg } 0 = 0$ ezért $\text{Ran tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = \mathbb{R}$ igazolásához elég megmutatni, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, melyre $\text{tg } x = y$ teljesül. Legyen $y \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta_1, \frac{\pi}{2} \right[$ esetén $\sin x > \frac{1}{2}$. Mivel $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ és a cos függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2} \right[$ esetén $\cos x < \frac{1}{2y}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $x_0 \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} \right[$ tetszőleges pont. Ekkor $\sin x_0 > \frac{1}{2}$ és $\cos x_0 < \frac{1}{2y}$, tehát

$$\text{tg } x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2y}} = y.$$

A folytonos tg függvényre a $[0, x_0]$ intervallumon $\text{tg } 0 < y < \text{tg } x_0$ teljesül, vagyis a Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x \in]0, x_0[$, melyre $\text{tg } x = y$, ezért $y \in \text{Ran tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

6.48. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis

$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}.$$

2. A $\cos|_{[0, \pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis

$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1}.$$

3. A $\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis

$$\text{arctg} \triangleq \left(\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1}.$$

6.49. Tétel. *Az arcsin az arccos és az arctg függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az arcsin és az arccos függvény a 6.28 tétel alapján folytonos. A $\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 6.30 tétel alapján az inverze is folytonos.

6.10. Hiperbolikus függvények tulajdonságai

6.50. Tétel. Hiperbolikus függvények monotonitása.

1. A ch függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, \infty[$ halmazon és

$$\operatorname{ch} |_{[0, \infty[} : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[\quad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

bijekció.

2. Az sh függvény szigorúan monoton növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon és

$$\operatorname{sh} |_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{sh} x$$

bijekció.

3. A th függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz, szigorúan monoton növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon és

$$\operatorname{th} |_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\quad x \mapsto \operatorname{th} x$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy $0 < x$ esetén $0 < \operatorname{sh} x$. Ekkor a $q = e^x$ jelöléssel $1 < q$ adódik és az igazolandó

$$\frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) > 0$$

egyenlőtlenség következik az $1 < q^2$ egyenlőtlenségből. Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}$ és $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, ezért a

$$\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{ch} x_2 = -2 \operatorname{sh} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)$$

azonosság alapján a ch függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, \infty[$ halmazon.

Most igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén $\operatorname{ch} x > 1$. A $q = e^x$ jelöléssel $1 < q$ és ekkor

$$\operatorname{ch} x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad q + \frac{1}{q} - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (q - 1)^2 > 0.$$

Legyen $q \in [1, \infty[$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{ch} |_{[0, \infty[}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in [0, \infty[$, melyre $\operatorname{ch} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 2q \\ (e^x)^2 - 2q e^x + 1 &= 0 \\ e^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{q^2 - 1} \geq 1$, ezért $q + \sqrt{q^2 - 1} \in \operatorname{Dom} \log$, sőt $\log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \geq 0$, vagyis az

$$x = \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \in [0, \infty[$$

számra $\operatorname{ch} x = q$ teljesül.

A ch függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

2. Mivel minden $x \in [0, \infty[$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$ és a ch függvény páros, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$.

Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, vagyis az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) > 0$, ezért a

$$\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{sh} x_2 = -2 \operatorname{ch} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)$$

azonosság alapján az sh függvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán.

Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre $\operatorname{sh} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2q \\ (e^x)^2 - 2q e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4}}{2} = q \pm \sqrt{1 + q^2} \end{aligned}$$

Mivel $q + \sqrt{1 + q^2} > 0$, ezért $q + \sqrt{1 + q^2} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \log \left(q + \sqrt{1 + q^2} \right) \in \mathbb{R}$$

számra $\operatorname{sh} x = q$ teljesül.

Az sh függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

3. A $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet az 5.39 tétel alapján a $\cos(iz) = 0$ egyenlettel ekvivalens, vagyis a 6.47 tétel alapján a $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

vagyis $\operatorname{Dom} \operatorname{th} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Legyen $x_1 < x_2$. Ekkor $0 < x_2 - x_1$, tehát az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh}(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\operatorname{th} x_1 - \operatorname{th} x_2 = \frac{-1}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2} \operatorname{sh}(x_2 - x_1)$$

azonosság alapján a th függvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a

$$\operatorname{th} x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < e^{-x}$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < 1$, valamint a

$$-1 < \operatorname{th} x \quad \Leftrightarrow \quad -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < e^x$$

ekvivalencia alapján $\operatorname{th} x < -1$.

A fenti bizonyításokhoz hasonlóan adott $q \in]-1, 1[$ megkeressük azt az $x \in \mathbb{R}$ számot, melyre $\operatorname{th} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= q \\ \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= q \\ e^{2x} - 1 &= q e^{2x} + q \\ e^{2x} &= \frac{1 + q}{1 - q} \end{aligned}$$

Mivel $\frac{1 + q}{1 - q} > 0$, ezért $\frac{1 + q}{1 - q} \in \operatorname{Dom} \log$, vagyis az

$$x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + q}{1 - q} \right)$$

számra $\operatorname{th} x = q$ teljesül.

Az th függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

6.51. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

- Az $\operatorname{sh} |_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh , vagyis

$$\operatorname{arsh} \triangleq (\operatorname{sh} |_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

- A $\operatorname{ch} |_{[0, \infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch , vagyis

$$\operatorname{arch} \triangleq (\operatorname{ch} |_{[0, \infty[})^{-1}.$$

- A $\operatorname{th} |_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth , vagyis

$$\operatorname{arth} \triangleq (\operatorname{th} |_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

6.52. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arsh} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$.
2. Minden $x \in [1, \infty[$ esetén $\operatorname{arch} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$.
3. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Bizonyítás. Az előző 6.50 tétel bizonyításban már levezettük ezeket a formulákat.

6.53. Tétel. *Az arsh az arch és az arth függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján ezek a függvények folytonos függvények kompozíció, ezért folytonosak.

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Differenciálhatóság

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható, vagy deriválható az a pontban ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

teljesül. Ezt az A számot az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük.

- Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltjának vagy derivált függvényének nevezzük a

$$f' : \left\{ a \in \text{Int Dom } f \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

függvényt.

- Az f differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$.
- Az f folytonosan differenciálható, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Jelölés. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{df(x)}{dx}$ jelölést is.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \rightarrow J$ függvény diffeomorfizmus, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Tétel. (A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Ekkor a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0,$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right|,$$

amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0$$

következik.

Most tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$ olyan szám, melyhez létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ekkor

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right|,$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0,$$

amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c = 0,$$

következik, tehát f differenciálható az a pontban és $f'(a) = c$.

7.4. Tétel. (*A differenciálhatóság jellemzése.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a) - c(x - a)| \leq \varepsilon \cdot |x - a|).$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Az előző állításból és a határérték definíciójából következik.

7.5. Tétel. Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$, $f'(a) = A$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a differenciálhatóság jellemzése alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a) - A(x - a)| \leq \varepsilon \cdot |x - a|).$$

Vagyis minden $|x - a| < \delta$ számra

$$|f(x) - f(a)| \leq (|A| + \varepsilon) |x - a|,$$

amiből $\lim_{x \rightarrow a} f = f(a)$ adódik. Ez pedig az f függvény folytonosságát jelenti.

7.2. Differenciálás műveleti tulajdonságai

7.6. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;
3. fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. A számolás folyamán a határértékekre vonatkozó 6.10 tételt fogjuk többször felhasználni.

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = c \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

3. Mivel az f függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ teljesül.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a) \end{aligned}$$

4. Mivel a g függvény folytonos az a pontban, ezért annak létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a)$ számra $g(x) \neq 0$. A továbbiakban az a pontnak ezt a környezetét fogjuk csak tekinteni. Továbbá a g függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ teljesül. Ezek alapján

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} - \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{(x - a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

7.7. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R})$$

teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ algebra.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

7.8. Tétel. (Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a g függvény differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \text{Int Dom } f$, tehát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R} : \\ |y - g(a)| < \delta_1 \rightarrow |f(y) - f(g(a)) - f'(g(a))(y - g(a))| \leq \varepsilon_1 |y - g(a)|. \end{aligned}$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontban, ezért $a \in \text{Int Dom } g$, tehát

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \\ |x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_2 |x - a|. \end{aligned}$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \quad |x - a| < \delta_3 \rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon_3.$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_3 \rightarrow |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)|.$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_1 |x - a|.$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| &\leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| \\ |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| &\leq \varepsilon_1 |x - a|. \end{aligned}$$

Ezek alapján, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$\begin{aligned} &|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| = \\ &= |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \\ &\quad + f'(g(a))(g(x) - g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| \leq \\ &\leq |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| + \\ &\quad + |f'(g(a))| \cdot |(g(x) - g(a)) - g'(a)(x - a)| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 |x - a| + |g'(a)| |x - a|) + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| = \\ &= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) |x - a| \end{aligned}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) < \varepsilon$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $|x - a| < \delta'$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - (f'(g(a)) \cdot g'(a))(g(x) - g(a))| \leq \varepsilon \cdot |x - a|,$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

7.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \quad b \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az f függvény végtelenben vett aszimptotájának nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.3. Hatványsorok deriválása

7.10. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\text{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n \text{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n})' = -n \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n-1}$.)

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

7.11. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

7.12. Tétel. (Elemi függvények deriváltja.) $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra.

Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z.$$

7.4. Közéértéktételek

7.13. Tétel. (Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A 6.27 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a, b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in]a, b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.

Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in]a, b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow \alpha+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \lim_{x \rightarrow \alpha-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in]a, b[$ teljesül.

7.14. Tétel. (Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Bizonyítás. Elég Rolle-tételt alkalmazni a

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

függvényre.

7.15. Tétel. (Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Bizonyítás. Cauchy-tételt kell alkalmazni a $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre.

7.16. Tétel. (Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a, b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a|.$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle közéérték tétel közvetlen következménye.

7.17. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

1. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.
2. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.
3. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növekvő az I intervallumon.
4. Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.
5. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a, b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.

1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növekvő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növekvő.

3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növekvő.

A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

7.5. Függvény inverzének deriválása

Magyarázat. A következő tétel segítségével az inverzfüggvények deriváltjait határozhatjuk meg.

7.18. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható és minden $b \in f(I)$ pontra

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

teljesül.

7.6. Elemi függvények inverzének deriválása

7.19. Tétel. (Elemi függvények inverzének a deriváltja.)

1. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
2. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
5. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. Minden $x \in]1, \infty[$ esetén $\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. A 7.18 tételt alkalmazva az $f = \exp$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$$

teljesül.

2. Legyen $x \in]-1, 1[$. A 7.18 tételt alkalmazva az $f = \sin$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

teljesül. Mivel

$$1 = \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

ezért

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Abból, hogy a $\sin$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon következik, hogy az $\arcsin$ függvény is szigorúan monoton növekszik, vagyis $\arcsin' > 0$. Ezek alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Az $\arcsin$ függvénynél bemutatott gondolatmenet alapján bizonyítható.

4. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.18 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{tg}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2 \operatorname{arctg} x$$

teljesül. Mivel

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x) \\ \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) \\ \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} &= 1 + x^2, \end{aligned}$$

ezért $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. 5. Legyen $x \in \mathbb{R}$. A 7.18 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{sh}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x}$$

teljesül. Mivel minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a}$, ezért $\operatorname{ch} \operatorname{arsh} x = \sqrt{1 + x^2}$, vagyis

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

6–7. A 7.18 tétel és a 6.52 tételben szereplő formulák segítségével könnyen igazolható.

7.20. Tétel. A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a $\operatorname{Ran} f$ halmazon és az f^{-1} függvény értékkészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{-1}$ elemre.

f	$\operatorname{Dom} f$	$\operatorname{Ran} f$	f'	f^{-1}	$\operatorname{Dom} f^{-1}$	$\operatorname{Ran} f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
$\exp$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\exp$	$\log$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$
$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\cos$	$\arcsin$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin$	$\arccos$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
tg	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1 + x^2}$
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ch	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
ch	$\mathbb{R}$	$[1, \infty[$	sh	arch	$[1, \infty[$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
th	$\mathbb{R}$	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	arth	$] -1, 1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1 - x^2}$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló.

7.21. Tétel. (*A hatványozás deriválása.*)

1. Ha $a \in [1, \infty[$, akkor az $\text{id}_{\mathbb{R}}^a$ függvény deriváltja $a \text{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.
2. Ha $a \in]-\infty, 1[$, akkor az $\text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^a$ függvény deriváltja $a \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{a-1}$.

Bizonyítás. Legyen $a \in [1, \infty[$ és $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ az $f(x) = x^a$ függvény. Ekkor

$$f'(x) = (\exp(a \log(x)))' = \exp(a \log(x)) a \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

teljesül a hatványozás definíciója, a láncszabály és az exponenciális valamint a logaritmus függvény deriválási szabálya alapján.

7.7. L'Hospital szabály

7.22. Tétel. (*L'Hospital szabály.*) Legyen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g' (]a, b[)$.

1. Ha $\lim_{b-} f = \lim_{b-} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim_{b-} \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{b-} \frac{f}{g}$ határérték is és

$$\lim_{b-} \frac{f}{g} = \lim_{b-} \frac{f'}{g'}.$$

2. Ha $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim_{a+} \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{a+} \frac{f}{g}$ határérték is és

$$\lim_{a+} \frac{f}{g} = \lim_{a+} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g' (]a, b[)$, valamint $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g \in \{0, \infty\}$. Ennek a bizonyításnak a mintájára igazolható a többi eset is.

1. Tegyük fel, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = 0$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a+} \frac{f}{g} = A$ határértéket. Terjesszük ki az f és g függvényt az a pontra is a 0 értékkel és jelölje $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ ezeket a függvényeket. Legyen $c \in]a, b[$ tetszőleges pont. Ekkor az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, c]$ intervallumon az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]a, c[$, melyre

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tehát ha $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\xi \in]a, a + \delta[$ esetén

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon,$$

akkor az $x \in]a, a + \delta[$ számokra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = \infty$ és

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a+} \frac{f}{g} = A$ határértéket.

Mivel $\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_1[$ esetén $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < 1$, vagyis minden $x \in]a, a + \delta_1[$ számra

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < 1 + |A|$$

teljesül, tehát az $\frac{f'}{g'}$ függvény korlátos a $]a, a + \delta_1[$ halmazon.

Mivel $\lim_{a+} f = \lim_{a+} g = \infty$, ezért létezik olyan $c \in]a, a + \delta_1[$, hogy minden $x \in]a, c[$ esetén $f(x), g(x) > 0$. Még egyszer alkalmazva ezt az elvet, azt kapjuk, hogy létezik olyan $d \in]a, c[$, hogy minden $x \in]a, d[$ esetén $f(x) > f(c)$ és $g(x) > g(c)$. Vezessük be a

$$T :]a, d[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}$$

függvényt. Legyen $z \in]a, d[$ tetszőleges pont. Ekkor az f és g függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt a $[z, c]$ intervallumon, az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]z, c[$, melyre

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

vagyis az

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{T(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

egyenlőség alapján

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} T(z) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (T(z) - 1),$$

tehát

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (T(z) - 1) \right|.$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow a+0} T(x) = 1$ és az $\frac{f'}{g'}$ korlátos a $]a, d[$ halmazon, ezért létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_3[$ esetén

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} (T(x) - 1) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül minden $z \in]a, d[$ számra. Ekkor a $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ olyan szám, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

7.8. Többszörös deriváltak

7.23. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$ és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az f függvény n -szer differenciálható az a pontban, ha $a \in \text{Dom } f^{(n)}$.
- Az f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ teljesül.
- Az f függvény n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható, ha $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$.
- Az f függvény végtelenszer differenciálható, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az f függvény n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható, ha f n -szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Megjegyzés. A fenti definícióban minden függvényre értelmeztük az $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvényt sorozatot, azonban könnyen lehet, hogy valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $\text{Dom } f^{(i)} = \emptyset$ és ekkor természetesen minden $\mathbb{N} \ni j > i$ esetén is $\text{Dom } f^{(j)} = \emptyset$.

◇

7.24. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

1. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növekvő.
2. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.

Bizonyítás. 1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény és legyen $a, b \in I$, $a < b$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(a) \leq f'(b)$. Minden $x \in]a, b[$ esetén

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a,$$

valamint $\frac{x-a}{b-a}, \frac{b-x}{b-a} \in [0, 1]$ és $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$. Tehát az f függvény konvexitása alapján

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \leq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Rövid számolással ebből az egyenlőtlenségből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

adódik, amiből

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \\ &\leq \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) \end{aligned}$$

következik.

Megfordítva, legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' monoton növekvő és legyen $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $t \in [0, 1]$ számra

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

teljesül, vagy másképp, hogy a

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b)$$

függvényre $g \leq 0$ teljesül. A g függvény a folytonossága és a $[0, 1]$ kompaktsága miatt felveszi a maximumát valamely $t_0 \in [0, 1]$ pontban. Tegyük fel, hogy $g(t_0) = c > 0$. Ekkor a Rolle-tétel bizonyítása alapján $g'(t_0) = 0$. Mivel f' monoton növekvő és

$$g'(t) = f'(t(a-b) + b)(a-b) - f(a) + f(b),$$

ezért g' is monoton növekvő. Tehát minden $z \in]t_0, 1[$ esetén $g'(z) \geq 0$. A Lagrange-féle közéértéktételt alkalmazva a $[t_0, 1]$ intervallumra, azt kapjuk, hogy létezik olyan $z \in]t_0, 1[$, melyre

$$g(1) - g(t_0) = g'(z)(1 - t_0),$$

azonban $g(1) - g(t_0) = 0 - c < 0$ és $g'(z)(1 - t_0) \geq 0$. Mivel ellentmondást kaptunk így a $g(t_0) = c > 0$ feltételezés nem helytálló, vagyis a g függvény maximuma nem lehet szigorúan pozitív.

2. A konkáv eset a -1 számmal való szorzással visszavezethető a konvex esetre.

7.25. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.

1. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.
2. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.

Bizonyítás. A 7.24 előző állítás és a 7.17 tétel alapján nyilvánvaló.

7.26. Tétel. (Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}.$$

Bizonyítás. Az exponenciális függvény konvexitásából és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \log x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k \exp(\log x_k)$$

7.27. Tétel. (Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^\beta.$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^n x_i$ és $y = \sum_{i=1}^n y_i$. Ha $0 < x, y$, akkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján minden $i \in \{1, \dots, n\}$ számra

$$\left(\frac{x_i}{x} \right)^\alpha \left(\frac{y_i}{y} \right)^\beta \leq \alpha \left(\frac{x_i}{x} \right) + \beta \left(\frac{y_i}{y} \right)$$

teljesül, melyet összegezve az i indexre

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^\beta \leq \alpha \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n x_i + \beta \frac{1}{y} \sum_{i=1}^n y_i = \alpha + \beta = 1$$

adódik. Ennek átrendezése a bizonyítandó egyenlőtlenség.

7.28. Tétel. (Minkowski-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i)^p)^{1-\frac{1}{p}} (x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i)^p)^{1-\frac{1}{p}} (y_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

adódik, aminek az átrendezése a bizonyítandó tétel.

7.9. Taylor-sorfejtés

7.29. Tétel. (Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$ -szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (b-\xi)^{n+1-p} (b-a)^p.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - \lambda (b-x)^p.$$

függvényt. Ekkor a

$$\begin{aligned} g(a) &= f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - \lambda (b-a)^p \\ g(b) &= 0 \end{aligned}$$

egyenlőségből látszik, hogy a

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^p} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right)$$

választás esetén $g(a) = g(b) = 0$ teljesül. Mivel a g függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében, valamint $g(a) = g(b) = 0$, ezért a Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in]a, b[$ pont, melyre $g'(\xi) = 0$ teljesül.

Most meghatározzuk a g' függvényt.

$$g'(x) = - \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \right)' + p\lambda (b-x)^{p-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!} k(b-x)^{k-1} \right) + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + p\lambda(b-x)^{p-1} = \\
&= - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Vagyis a $g'(\xi) = 0$ egyenletből

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-x)^n + \lambda p(b-\xi)^{p-1} = 0$$

adódik, amibe beírva λ értékét és átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséghez jutunk.

Magyarázat. Külön definiáljuk a fenti tétel két speciális esetét.

7.30. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$ -szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-\xi)^n (b-a)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-\xi)^n (b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.31. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Az f függvény a pontbeli n -ed fokú Taylor-polinomjának nevezzük a

$$T_{n,a}^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \text{Dom } f$, akkor az f függvény a pontbeli Taylor-sorának nevezzük a

$$T_a^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

hatványsort.

7.32. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f'$. Az f függvény a pontbeli érintőjének nevezzük a $T_{1,a}^f$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.33. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \text{Int}(\text{Dom } f^{(n)} \cap \text{Dom } g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az f és g függvények az a pontban n -ed rendben érintkeznek, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.34. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \text{Int Dom } f^{(n)}$ és legyen P_n olyan n -ed fokú polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T_{n,a}^f$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \text{Int Dom } f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n -ed fokú polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Az $n = 0$ esetben nyilvánvaló az állítás, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 1$. Legyen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-a)^k$$

olyan polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $j \in \{0, \dots, n\}$ esetén

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n b_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-a)^{k-j}$$

teljesül. Az n -ed rendben való érintkezés miatt minden $j \in \{0, \dots, n\}$ számra

$$f^{(j)}(a) = P_n^{(j)}(a) \rightarrow f^{(j)}(a) = j! \cdot b_j$$

teljesül, vagyis $b_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ezért

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = T_{n,a}^f(x).$$

7.35. Tétel. (Infinitezimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

7.10. Lokális szélsőérték jellemzése

7.36. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) < f(x)$. f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.37. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$.

1. Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) < 0$.
2. Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros és $f^{(n)}(a) > 0$.

3. Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$ teljesül, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$. Az 1. pontot igazoljuk, a második pont a -1 számmal való szorzással visszavezethető az elsőre.

Mivel $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $]a - r, a + r[\subseteq \text{Dom } f$. Az infinitezimális Taylor-formula alapján (7.35 tétel) a

$$\varphi :]a - r, a + r[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x - a|^n}, & \text{ha } x \neq a; \\ 0, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos, továbbá a deriváltakra vonatkozó feltételek miatt

$$T_{n,a}^f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

vagyis az $x \neq a$ esetben

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x - a)^n}{|x - a|^n},$$

amiből

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x - a)^n}{|x - a|^n} + \varphi(x) \right) \quad (7.1)$$

következik.

1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban. Ekkor létezik olyan δ_1 , hogy minden $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[\setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$. Legyen $\delta = \min \{r, \delta_1\}$. Ha n páros, akkor (7.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right),$$

vagyis minden $x \in]a - \delta, a + \delta[$ számra

$$0 > \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \rightarrow -n!\varphi(x) > f^{(n)}(a),$$

amiből a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt $0 \geq f^{(n)}(a)$ adódik, azonban feltettük, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$, ezért $0 > f^{(n)}(a)$.

Ha n páratlan, akkor a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[$ esetén

$$\varphi(x) < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|.$$

Legyen $\delta = \min \{r, \delta_1\}$.

Ha $0 < f^{(n)}(a)$ és $x \in]a, a + \delta[$, akkor $a < x$, $\frac{(x - a)^n}{|x - a|^n} = 1$, tehát a (7.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.

Ha $0 > f^{(n)}(a)$ és $x \in]a - \delta, a[$, akkor $x < a$, $\frac{(x - a)^n}{|x - a|^n} = -1$, tehát a (7.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0,$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.

2. Tegyük fel, hogy n páros és $f^{(n)}(a) < 0$. A (7.1) képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right).$$

A $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $]a - \delta_1, a + \delta_1[$ esetén

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) < 0.$$

Ekkor a $\delta = \min\{r, \delta_1\}$ számra teljesül az, hogy minden $x \in]x - \delta, x + \delta[\setminus \{a\}$ elemre

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) < 0,$$

vagyis $f(x) < f(a)$.

7.38. Tétel. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$. Tegyük fel, hogy

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(|f^{(n)}(x)| \leq K \right)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad \forall x \in B_r(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$, továbbá legyen $K \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(|f^{(n)}(x)| \leq K \right)$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ rögzített szám. A Taylor-formula alapján, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y \in B_r(a)$, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Mivel az $n \mapsto \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}$ sorozat a nullához tart, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right| = 0$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

7.39. Tétel. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A hatványsorok n -edik deriváltja

$$P_a^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = P_b^{(n)}(x).$$

Amiből az $x = 0$ helyettesítés után $a_n = b_n$ adódik. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, ezért $a = b$.

7.40. Tétel. Ha $x \in]-1, 1[$, akkor

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Bizonyítás. Az $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, ezért minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

függvény. Valamint $\text{Dom } \log = \mathbb{R}^+$ miatt minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$f(x) = \log(1+x)$$

függvény. A hatványsor illetve a logaritmus függvény deriválási szabály alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-(-x)} \\ g'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k. \end{aligned}$$

Mivel $|x| < 1$, ezért a geometriai sor összegképlete alapján $(f-g)' = 0$ a $] -1, 1[$ intervallumon. Vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in]-1, 1[$ esetén $f(x) = C + g(x)$. Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért $C = 0$. Vagyis minden $x \in]-1, 1[$ számra $f(x) = g(x)$.

7.11. Binomiális sorfejtés

7.41. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0, \\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

7.42. Tétel. (Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1, 1[$ esetén

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = (1+x)^\alpha$ és $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. A

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - k + 1}{k - 1} \right| = 1,$$

határérték alapján a hatványsor konvergenciasugara 1, vagyis minden $x \in]-1, 1[$ esetén a $P(x)$ hatványsor konvergens.

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$. Ez az

$$\begin{aligned} P'(x)f(x) - f'(x)P(x) &= (1+x)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k - \alpha \right) = \\
&= (1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k = 0
\end{aligned}$$

egyenlőségéből következik, ahol felhasználtuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} = 0.$$

Mivel $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $f = cP$ teljesül a $] -1, 1[$ halmazon. Továbbá az $f(0) = P(0)$ miatt $c = 1$, vagyis $f = P$.

8. Határozatlan integrál

8.1. Primitív függvény és tulajdonságai

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f primitív függvényének nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f függvény határozatlan integráljának nevezzük az

$$\{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x) dx$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

8.2. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.

Ha $G \in (F + C \mid C \in \mathbb{R})$, akkor létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, melyre $G = F + C$. Ekkor $G' = F' = f$, vagyis a G függvény is az f primitívfüggvénye.

Ha $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f primitív függvénye, akkor $G' = f$, tehát $(G - F)' = 0$. Ebből a 7.17 tétel alapján következik, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, szám, hogy $G - F = C$, vagyis $G \in (F + C \mid C \in \mathbb{R})$.

Megjegyzés. A fenti tétel nem igaz, ha I nem összefüggő halmaz!

◇

Jelölés. A fenti tétel miatt, ha F az f függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

8.3. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

Bizonyítás. Az $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \quad (cF)' = cF'$$

deriválási szabályból következik.

8.4. Tétel. (Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{array}{lll} \int \exp = \exp + C & \int \sin = -\cos + C & \int \cos = \sin + C \\ \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C & \int \operatorname{sh} = \operatorname{ch} + C & \int \operatorname{ch} = \operatorname{sh} + C \\ \int x^a dx = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C & & \end{array}$$

8.2. Integrálási módszerek

8.5. Tétel. (Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye.

Legyen $F \in \int fg - \int (fg')$. Ekkor

$$fg - F \in \int (fg') \rightarrow (fg - F)' = fg' \rightarrow f'g + fg' - F' = fg' \rightarrow F' = f'g,$$

vagyis $F \in \int (f'g)$, ezért az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, valamint

$$fg - \int (fg') \subseteq \int (f'g)$$

teljesül.

Most megmutatjuk, hogy $\int (f'g) \subseteq fg - \int (fg')$. Ehhez legyen $F \in \int (f'g)$. Ekkor a bizonyítandó $F \in fg - \int (fg')$ kifejezés ekvivalens alakja az alábbi.

$$fg - F \in \int (fg')$$

Ez viszont egyszerűen adódik az

$$(fg - F)' = f'g + fg' - F' = fg'$$

deriválásból.

8.6. Tétel. (Helyettesítéssel integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f \right) \circ \varphi.$$

Bizonyítás. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ diffeomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $F \in \int f$ és legyen $G = F \circ \varphi$. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

vagyis $G \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$. A fenti gondolatmenetből

$$\left(\int f \right) \circ \varphi \subseteq \int (f \circ \varphi)\varphi'$$

is következik.

Most igazoljuk, hogy

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' \subseteq \left(\int f \right) \circ \varphi$$

teljesül. Legyen $F \in \int (f \circ \varphi) \varphi'$, ami azt jelenti, hogy $F' = (f \circ \varphi) \varphi'$. Azt kell igazolni, hogy $F \circ \varphi^{-1} \in \int f$, ami ekvivalens azzal, hogy $(F \circ \varphi^{-1})' = f$. A függvénykompozíció deriválására vonatkozó láncszabály és az inverzfüggvény deriválására vonatkozó

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}.$$

szabály felhasználásával a bizonyítandó

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi^{-1})' &= (F' \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' = \\ &= (((f \circ \varphi) \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f \end{aligned}$$

egyenlőség adódik.

Megjegyzés. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ differenciálható homeomorfizmus. Ekkor a fenti képlet az

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx$$

az alakban írható fel az $x = \varphi(t)$ helyettesítéssel.

◇

8.7. Tétel. (Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) \, dx &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C & x \in]-1, 1[\\ \int \arccos(x) \, dx &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C & x \in]-1, 1[\\ \int \operatorname{arctg}(x) \, dx &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C & x \in \mathbb{R} \\ \int \operatorname{arsh}(x) \, dx &= x \operatorname{arsh} x - \sqrt{1+x^2} + C & x \in \mathbb{R} \\ \int \operatorname{arch}(x) \, dx &= x \operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C & x \in]1, \infty[\\ \int \operatorname{arth}(x) \, dx &= x \operatorname{arth} x + \frac{1}{2} \log(1-x^2) + C & x \in]-1, 1[\\ \int \log(x) \, dx &= x \log(x) - x + C & x \in]0, \infty[\end{aligned}$$

Bizonyítás. Mindegyik formula a parciális integrálás következménye. Az első integrált megmutatjuk részletesen. Legyen

$$\begin{aligned} f :]-1, 1[& \quad x \mapsto x \\ g :]-1, 1[& \quad x \mapsto \arcsin x \\ \varphi :]-1, 1[& \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Ekkor f, g és φ differenciálható függvény, valamint

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

formula felhasználásával azt kapjuk, hogy az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, hiszen

$$(-\varphi)' = fg' \quad \rightarrow \quad -\varphi \in \int (fg').$$

A 8.5 parciális integrálás tétele alapján az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül, ami ebben az esetben az alábbi egyenlőséget jelenti.

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) \, dx &= \int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx = \\ &= x \arcsin x - (-\varphi(x)) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Magyarázat. A parciális integrálás segítségével számolható az alábbi típusú integrál.

$$\int \left\{ \begin{array}{l} \text{polinom} \\ \text{exp, log} \\ \text{sin, cos} \\ \text{sh, ch} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{polinom} \\ \text{exp, log} \\ \text{sin, cos} \\ \text{sh, ch} \end{array} \right\}$$

8.8. Tétel. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbb{R}$ bármely nyílt intervallumán az

$$\int \sin^n x \cos^m x$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. Ha $m = 0$, akkor

$$\int \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} \int (1 - \cos t)^k \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } n = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ - \int (1 - t^2)^k \, dt, & t = \cos x \quad \text{ha } n = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

2. Ha $n = 0$, akkor

$$\int \cos^m x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} \int (1 + \cos t)^k \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \int (1 - t^2)^k \, dt, & t = \sin x \quad \text{ha } m = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

3. Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.

4. Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ ($k, l \in \mathbb{N}$), akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+l+1}} \int (\sin^{2k} t)(1 + \cos t)^{l-k} \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } n \leq m, \\ \frac{1}{2^{k+l+1}} \int (\sin^{2l} t)(1 - \cos t)^{k-l} \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } n > m. \end{cases}$$

Bizonyítás. A helyettesítéses integrálás alapján egyszerűen igazolható.

8.9. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

1. Ekkor az $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \log |ax+b| + C, & \text{ha } n = 1; \\ \frac{1}{a(1-n)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

teljesül.

2. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az $\mathbb{R}$ halmazon

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctg \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C,$$

és ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C$$

teljesül.

3. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= \frac{2ax + b}{(1-n)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ &+ \frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2 - 4ac)} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} dx. \end{aligned}$$

4. Az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \log |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

5. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= \frac{bx + 2c}{(n-1)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ &+ \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} dx. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Deriválással egyszerűen adódik.

8.3. Parciális törtre bontás

Magyarázat. A következő tétel szerint bármely két polinomnak a hányadosa integrálható az előző tételben szereplő formulák segítségével. Azt a módszert, ahogy visszavezetjük a polinomok hányadosát a fenti tételben szereplő integrandusokra *parciális törtre bontásnak* nevezik. Mivel a tétel bizonyítása bizonyos lineáris egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságának a vizsgálatáról szól, és számos tételt felhasznál a lineáris algebra témaköréből, ezért nem ismertetjük.

8.10. Tétel. (Parciális törtre bontás.) Legyen $P_n(x)$ egy tetszőleges n -ed fokú-, $Q_m(x)$ pedig egy olyan m -ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója 1.

1. Ha $n \geq m$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{P}(x)$ $(n-m)$ -ed fokú- és m -nél kisebb fokú $\tilde{P}(x)$ polinom, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \bar{P}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}$$

teljesül.

2. A Q_m polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $(\lambda_i)_{i=1,\dots,k}$, $(p_i, q_i)_{i=1,\dots,l}$ páronként különböző valós számok és számpárok, valamint $(z_i)_{i=1,\dots,k}$, $(v_i)_{i=1,\dots,l}$ természetes számok, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Q_m(x) = \left(\prod_{i=1}^k (x + \lambda_i)^{z_i} \right) \left(\prod_{i=1}^l (x^2 + p_i x + q_i)^{v_i} \right)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1 \leq i \leq l$ esetén sem létezik valós gyöke az $x^2 + p_i x + q_i$ polinomnak. Ha

$n < m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,z_i}$, $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})_{i=1,\dots,l;j=1,\dots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{z_i} \frac{\mu_{ij}}{(x + \lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{v_i} \frac{\alpha_{ij}x + \beta_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

teljesül minden $x \in \text{Dom } \frac{P_n}{Q_m}$ elemre.

9. Határozott integrál

9.1. A majdnem mindenütt tulajdonság

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \triangleq \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{R} \\ a \leq b}} \{[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad [a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[\mapsto b - a.$$

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén sokszor fogjuk tekinteni az a és b pontok által meghatározott intervallumokat. Azokban az esetekben, mikor mondanivalónk érvényes az $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ és $]a, b[$ intervallumok mindegyikére, az $]a, b[$ szimbólummal fogunk élni.

9.2. Tétel. Ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ teljesül, akkor $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{I}_0$ és

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) \leq \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

Bizonyítás. Legyen $A_1 =]a_1, b_1[$ és $A_2 =]a_2, b_2[$.

Ha $b_1 = a_2$, akkor az $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ feltétel miatt $A_1 =]a_1, b_1[$ és $A_2 = [a_2, b_2[$, tehát $A_1 \cup A_2 =]a_1, b_2[\in \mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = b_2 - a_1 = b_2 - a_2 + b_1 - a_1 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2).$$

Ha $b_1 > a_2$, akkor $A_1 \cup A_2 =]\min\{a_1, a_2\}, \max\{b_1, b_2\}[\in \mathfrak{I}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = \max\{b_1, b_2\} - \min\{a_1, a_2\} \leq b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2),$$

ahol felhasználtuk az $a_1 \leq b_1$ és $a_2 \leq b_2$ egyenlőtlenséget.

9.3. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$ -ban haladó $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon.$$

9.4. Tétel. (Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)

1. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$ -ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon$$

teljesül.

2. Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.

3. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is nulla mértékű.

4. Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.

Bizonyítás. 1. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \in \mathfrak{I}_0$,

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} N_p &= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists c_n \in \mathbb{R} : A_n = \{c_n\}\} \\ N_r &= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} : a_n < b_n \wedge A_n =]a_n, b_n[\}. \end{aligned}$$

Ekkor $N_p \cap N_r = \emptyset$ és $N_p \cup N_r = \mathbb{N}$. Minden $n \in N_r$ számhoz létezik olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n =]a_n, b_n[$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] \frac{3a_n - b_n}{2}, \frac{3b_n - a_n}{2} \right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = 2\mu_0(A_n)$. Minden $n \in N_p$ számhoz létezik olyan $c_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \{c_n\}$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] c_n - \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n} \right[.$$

Az $U_n \in \mathfrak{I}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}$. Az így definiált nyílt halmazokból álló $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre

$$\begin{aligned} A &\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}_r} \mu_0(U_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_p} \mu_0(U_n) < 2 \sum_{n \in \mathbb{N}_r} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}_p} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} \leq \\ &\leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül.

2. A definíció alapján nyilvánvaló.

3. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $n \in \mathbb{N}$ paraméterhez tartozó A_n halmaz nulla mértékű, ezért létezik olyan $(U_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $U_{n,i} \in \mathfrak{I}_0$, $A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i}$ és $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i} = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{\sigma(k)},$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_{\sigma(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

4. Mivel az egy elemű halmaz nulla mértékű, ezért az előző pont alapján nyilvánvaló.

9.5. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és ehhez definiáljuk az $\alpha = \frac{3a+b}{4}$ és $\beta = \frac{a+3b}{4}$ számokat. Mivel

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[,$$

ezért elég igazolni, hogy $[\alpha, \beta]$ nem nulla mértékű. Indirekt, tegyük fel, hogy $[\alpha, \beta]$ nulla mértékű. Ekkor a 9.4 tétel alapján létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer, melyre

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

teljesül, továbbá feltehetjük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[\alpha, \beta] \cap U_n \neq \emptyset$, hiszen egyébként kihagyhatjuk az $[\alpha, \beta]$ halmaz lefedéséből. Mivel az $[\alpha, \beta]$ halmaz kompakt, ezért véges sok nyílt halmazzal is lefedhető, vagyis létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^N U_n.$$

Ezek után tekintsük az alábbi konstrukciót.

- Mivel $\alpha \in \bigcup_{n=0}^N U_n$, ezért létezik olyan $r_0 \in \{0, \dots, N\}$ szám, melyre $\alpha \in U_{r_0}$ teljesül, és legyen $L_0 = U_{r_0}$.
- Ha már valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén r_i és L_i definiált, akkor ha $\beta < \sup L_i$ teljesül, akkor ne definiáljunk több elemet, ha pedig $\beta \geq \sup L_i$, akkor a

$$\sup L_i \in \left(\bigcup_{n=0}^N U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^i U_{r_k} \right)$$

tartalmazás miatt létezik olyan $m \in \{0, \dots, N\} \setminus \{r_k | k = 0, \dots, i\}$ elem, melyre $\sup L_i \in U_m$ teljesül. Ekkor legyen $r_{i+1} = m$ és legyen $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}}$.

Tegyük fel, hogy a fenti konstrukcióval $M + 1$ elemet definiáltunk, vagyis ismert az $(L_i)_{i \in \{0, \dots, M\}}$ halmazrendszer. A konstrukció miatt $[\alpha, \beta] \subseteq L_M$ teljesül, valamint minden $i \in \{0, \dots, M - 1\}$ esetén $L_i \cap U_{r_{i+1}} \neq \emptyset$, tehát a 9.2 tétel miatt $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}} \in \mathfrak{I}_0$ és

$$\mu_0(L_{i+1}) = \mu_0(L_i \cup U_{r_{i+1}}) \leq \mu_0(L_i) + \mu_0(U_{r_{i+1}})$$

teljesül. Ebből az

$$\beta - \alpha = \mu_0([\alpha, \beta]) \leq \mu_0(L_M) \leq \sum_{k=0}^M \mu_0(U_{r_k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_k) < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ellentmondás adódik.

9.6. Definíció. A

$$C \triangleq [0, 1] \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left[\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right]$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.7. Tétel. (A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.

Bizonyítás. 1. A Cantor-halmaz korlátos és zárt, tehát kompakt.

2. Definiáljuk rekurzív módon a

$$\rho : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1]) \quad J \mapsto \left(\frac{1}{3} J \right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} J \right)$$

leképezéssel és az $I_0 = [0, 1]$ kezdőelemmel az $n \mapsto I_n$ sorozatot, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_{n+1} = \rho(I_n)$. Ha $J \in \mathcal{P}([0, 1])$ az $\mathfrak{I}_0$ halmaz véges sok elemének az uniója, akkor $\rho(I)$ is ilyen tulajdonságú, vagyis mindegyik I_n halmaz véges sok intervallum uniója. A ρ definíciója alapján minden $i \in \mathbb{N}$ elemre $\mu_0(I_{n+1}) = \frac{2}{3} \mu_0(I_n)$ is teljesül, vagyis $\mu_0(I_0) = 1$ miatt $\mu_0(I_n) = \left(\frac{2}{3} \right)^n$. Rövid számolással igazolható, hogy minden $i \in I$ esetén $C \subseteq I_n$ teljesül, ahol C jelöli a Cantor-halmazt. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, ezért minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\left(\frac{2}{3} \right)^n < \varepsilon$ és ekkor I_n intervallumoknak olyan véges rendszere, melyre

$$C \subseteq \bigcup I_n \quad \text{és} \quad \sum_{J \in I_n} \mu_0(J) < \varepsilon.$$

9.8. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p .

9.9. Tétel. Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.

9.2. A Riemann-integrál

9.10. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ szám n -est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a, b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a, b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, x_0 = a, x_{n-1} = b, \forall i \in (n-1) : x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha $\text{Ran } y \subseteq \text{Ran } x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

Magyarázat. Vagyis az $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás pontosan akkor finomabb, mint az $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$$

teljesül és ezt az $y \leq x$ vagy másképp a $(y_i)_{i=0, \dots, m} \leq (x_i)_{i=0, \dots, n}$ szimbólummal jelöljük.

9.11. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ és $y = (y_i)_{i=0, \dots, m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i \mid 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}, \quad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0, \dots, k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0, \dots, k}$ felosztást az x és az y felosztás *egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.12. Definíció. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ egy felosztás. Ekkor az f függvény $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztáshoz tartozó *alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát*.

$$\begin{aligned} s(f) &= \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a, b]} \right\} \\ S(f) &= \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a, b]} \right\} \end{aligned}$$

9.13. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \leq S_x(f)$.
2. Ha z jelöli az $[a, b]$ intervallum triviális felosztását, azaz $z = (a, b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \leq s_x(f)$ és $S_x(f) \leq S_z(f)$.
3. Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \leq y$ teljesül, akkor $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_y(f) \leq S_x(f)$.
4. Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \leq S_y(f)$ teljesül.
5. Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ és $y = (y_i)_{i=0, \dots, m}$ az $[a, b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \leq y$ teljesül.

1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Az $s_z(f) \leq s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f) \end{aligned}$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \leq S_z(f)$ teljesül.

3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\begin{aligned} &\left(\inf_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\inf_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \geq \\ &\geq \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j) \\ &\left(\sup_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\sup_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \leq \\ &\leq \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j), \end{aligned}$$

ezért $s_x(f) \leq s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \geq S_{x'}(f)$.

Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_x(f) \geq S_y(f)$ teljesül.

4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \leq z$ és $y \leq z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \leq S_z(f)$, ezért $s_x(f) \leq S_y(f)$.
5. Mivel minden x felosztásra $z \leq x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \leq s_x(f) \leq S_x(f) \leq S_z(f),$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

9.14. Definíció. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény

- *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- *Riemann-integrálható*, ha $\int_a^b f = \int_a^b f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x) dx$ jelöli az $\int_a^b f = \int_a^b f$ értéket.

Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}.$$

- Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq - \int_a^b f$$

jelölést.

- Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $a \in \text{Dom } f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

- Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f függvény *határozott integráljának* nevezzük.

9.15. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \leq \beta$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a 9.13 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \leq S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

9.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Magyarázat. Ebben a fejezetben először csak elégséges feltételeket adunk függvények Riemann-integrálhatóságára. A fejezet végén közelebbről is megvizsgáljuk a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad korlátos függvény Riemann-integrálhatóságára.

9.16. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a, b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \quad S_y(f) < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \leq z$ és $y \leq z$, ezért $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$, vagyis

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq s_z(f) \leq S_z(f) \leq S_y(f) < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$c \leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2},$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.

Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. A 9.15 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.

Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.

Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

9.17. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a, b]} f(t) \right) - \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right).$$

Az f függvény $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztáshoz tartozó oszcillációs összege

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i).$$

Magyarázat. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén

$$\Omega_x(f) = S_x(f) - s_x(f)$$

teljesül.

9.18. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A 9.16 tétel alapján nyilvánvaló.

9.19. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u, v \in [a, b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $H = f([a, b])$ és $A = \{|x - y| \mid x, y \in H\}$. Mivel f korlátos, ezért a H halmaz is korlátos, vagyis létezik az $\alpha = \sup H$ és a $\beta = \inf H$ valós szám. Megmutatjuk az

$$\alpha - \beta = \sup A$$

egyenlőséget, melyből már következik a bizonyítandó állítás.

Bármely $x, y \in H$ számra $\beta \leq x, y \leq \alpha$ teljesül, ezért

$$\beta - \alpha \leq x - y \leq \alpha - \beta,$$

vagyis

$$|x - y| \leq \alpha - \beta.$$

Tehát $\alpha - \beta$ felső korlátja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik kisebb felső korlátja az A halmaznak. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan felső korlát, melyre $\delta < \alpha - \beta$ teljesül. Vezessük be a pozitív $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta - \delta}{2}$ paramétert. Ekkor létezik olyan $x, y \in H$, melyre $\alpha - \varepsilon < x$ és $y < \beta + \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$x - y > \alpha - \varepsilon - \beta - \varepsilon = \delta > 0.$$

Tehát van olyan $x, y \in H$ elem, melyre $|x - y| > \delta$ teljesül, tehát δ nem felső korlátja az A halmaznak.

9.4. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

9.20. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \quad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, melyre

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} &< s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4} \\ \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} &< s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén

$$\begin{aligned} s_z(f) + s_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = s_z(f + g) \\ S_z(f) + S_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = S_z(f + g). \end{aligned}$$

Legyen $z = x \sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f) + s_x(g) \leq s_x(f + g) \leq s_z(f + g) \leq S_z(f + g) \leq S_y(f + g) \leq S_y(f) + S_y(g)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < s_z(f + g) \leq S_z(f + g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\Omega_z(f + g) < \varepsilon$. Ez pedig a 9.18 tétel alapján azt jelenti, hogy $f + g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{és} \quad \inf S(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.

Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t \in [a, b]$ esetén $|f(t)| < K$ teljesül. Ekkor minden $u, v \in [a, b]$ elemre

$$|f^2(u) - f^2(v)| = |f(u) + f(v)| \cdot |f(u) - f(v)| \leq 2K \cdot |f(u) - f(v)|.$$

Vagyis bármely $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztásra a 9.19 tétel alapján

$$\Omega_x(f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f^2(u) - f^2(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) = 2K\Omega_x(f)
\end{aligned}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2 \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Ha $g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor az $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

9.21. Tétel. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a, c, b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért a 9.13 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f),$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon.$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melykerek $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a, c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.

A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c, b]$ intervallumon is.

2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.

Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a, c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül és mivel $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c, b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f),$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik.

9.22. Tétel. Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a, b]$ kompakt halmaz, ezért a 6.33 Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a, b]$ számra

$$|u - v| < \delta \rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $n = \left\lceil \frac{b - a}{\delta} \right\rceil + 1$ és minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a),$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást. Ekkor a 9.19 tétel alapján

$$\begin{aligned} \Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \frac{b - a}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

9.23. Tétel. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.

Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonló konstrukciót a 9.22 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\begin{aligned} \Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $c = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

9.24. Tétel. Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

ezért minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ indexre a 9.19 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]).$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ következik.

9.25. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvényre

1. ha $f \geq 0$, akkor $\int_a^b f \geq 0$;
2. ha $f \geq g$, akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;
3. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a, b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékükre is $\int_a^b f \geq 0$ teljesül.
2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h a 9.20 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

A tétel 1. pontja alapján $\int_a^b h \geq 0$, ezért $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

9.5. Newton–Leibniz-tétel

9.26. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztását. Minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \\ F(b) - F(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

adódik. Mivel $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \leq f(c_i) \leq \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= F(b) - F(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = S_x(f). \end{aligned}$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_x(f)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ következik.

9.27. Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon, akkor

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a, b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és innen már a 9.26 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

9.6. Az integrálfüggvény

9.28. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.29. Tétel. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Az I_f függvény folytonos.
2. Ha f folytonos az $x_0 \in]a, b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I'_f(x_0) = f(x_0)$.
3. Ha $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in]a, b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $|f(x)| < K$.

1. Legyen $x, y \in [a, b]$. Ekkor a 9.21 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f,$$

vagyis felhasználva a 9.25 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K |x - y|$$

adódik, amiből az $y \rightarrow x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.

2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a, b] : |z - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a, b]$. Ekkor a 9.21 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} I_f(z) - I_f(x_0) &= \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f \\ (f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) &\leq \int_{x_0}^z f \leq (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0), \end{aligned}$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \rightarrow x_0 + 0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I'_f(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

9.7. Lebesgue-tétel

9.30. Tétel. (Lebesgue-tétel.) Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $x \in [a, b]$ számra $|f(x)| < K$ teljesül.

1. Az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon > \frac{1}{n}$ teljesül, ezért az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban az

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n}.$$

alakban is felírható. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$D_n = \left\{ x \in [a, b] \mid \forall \delta > 0 \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n} \right\},$$

valamint legyen $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Ekkor $x \in D$ pontosan akkor teljesül, ha f nem folytonos az x pontban.

2. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor a D halmaz nulla mértékű, ezért a 9.4 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz is nulla mértékű. Fordítva, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz nulla mértékű, akkor a 9.4 tétel alapján D is nulla mértékű. Tehát elég az alábbi következtetéseket igazolni.

$$D \text{ nulla mértékű} \rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : D_n \text{ nulla mértékű}$$

3/a. Tegyük fel, hogy a D halmaz nulla mértékű és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 9.4 tétel alapján létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt intervallumokból álló halmazrendszer, melyre

$$D \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon'$$

teljesül. Ha $z \in [a, b] \setminus D$, akkor az f függvény folytonos az z pontban, vagyis létezik olyan $\delta_z \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

$$\forall y \in]z - \delta_z, z + \delta_z[\cap [a, b] : |f(z) - f(y)| < \varepsilon'$$

teljesül. Ekkor

$$[a, b] \subseteq D \cup ([a, b] \setminus D) \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{z \in [a, b] \setminus D} \left[z - \frac{\delta_z}{2}, z + \frac{\delta_z}{2} \right] \right)$$

az $[a, b]$ kompakt halmaz egy nyílt halmazokkal való lefedését adja meg, melyből kiválasztható véges sok, mely szintén lefedi az $[a, b]$ halmazt. Tehát létezik olyan $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz és véges sok $z_1, \dots, z_m \in [a, b] \setminus D$ pont, melyre

$$[a, b] \subseteq \left(\bigcup_{n \in F} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \left[z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right] \right) \quad (9.1)$$

teljesül.

3/b. Most elkészítjük ezen lefedés végpontjai által meghatározott felosztást. Ehhez legyen

$$\mathcal{G}' = \left(\bigcup_{n \in F} \{ \inf A_n, \sup A_n \} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \left\{ z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right\} \right) \cup \{a, b\},$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cap [a, b],$$

és az alábbi rekurzióval definiáljunk egy sorozatot.

- Legyen $x_0 = a$ és $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \setminus \{x_0\}$.
- Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén x_i és $\mathcal{G}_i$ már definiált és $x_i < b$, akkor legyen $x_{i+1} = \min \mathcal{G}_i$ és $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i \setminus \{x_{i+1}\}$, ha pedig $x_i = b$, akkor legyen vége a sorozatnak.

Mivel a véges elemszámú $\mathcal{G}$ halmazból válogatunk elemeket így egy véges hosszúságú $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ sorozatot kapunk, mely egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak.

3/c. Az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részre bontjuk, az egyikben az intervallumok hossza kicsi, a másikban az oszcillációs összeg kicsi. Ehhez definiáljuk a

$$J_1 = \{j \in \{0, \dots, n-1\} \mid \exists n \in F :]x_j, x_{j+1}[\subseteq A_n\}$$

$$J_2 = \left\{ j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J_1 \mid \exists i \in \{1, \dots, m\} :]x_j, x_{j+1}[\subseteq \left[z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right] \right\}$$

indexhalmazt. Nyilván $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ és $J_1 \cup J_2 \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Megmutatjuk, hogy $J_1 \cup J_2 = \{0, \dots, n-1\}$ teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$, melyre $i_0 \notin J_1$ és $i_0 \notin J_2$ teljesül. Legyen $\alpha = x_{i_0}$ és $\beta = x_{i_0+1}$. Mivel $\alpha \in [a, b]$ ezért a (9.1) képlet alapján az alábbi esetek lehetségesek.

- Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\alpha \in A_n$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_1$ miatt $\sup A_n < \beta$, tehát a felosztás konstrukciója miatt az $[\alpha, \beta]$ intervallumban $\sup A_n$ is szerepelne osztópontként.
- Létezik olyan $i \in \{1, \dots, m\}$, melyre $\alpha \in \left[z_i - \frac{\delta_{z_i}}{2}, z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} \right]$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_2$ miatt $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2} < \beta$, tehát az $[\alpha, \beta]$ intervallumban lenne még egy osztópont, $z_i + \frac{\delta_{z_i}}{2}$, a konstrukció miatt.

Tehát mindkét esetben ellentmondást kapunk, így $J_1 \cup J_2 = \{0, \dots, n-1\}$.

3/d. Az I felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részben számoljuk ki.

$$\omega_1 = \sum_{i \in J_1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_1} 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 2K \sum_{n \in F} \mu_0(A_n) \leq$$

$$\leq 2K \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < 2K\varepsilon'$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \sum_{i \in J_2} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_2} 2\varepsilon' \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq 2\varepsilon' \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) \leq 2\varepsilon'(b-a)\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \omega_1 + \omega_2 < 2K\varepsilon' + 2(b-a)\varepsilon' = 2(K+b-a)\varepsilon'.$$

Vagyis a tetszőlegesen választott ε paraméterhez legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(K+b-a)}$. Ebből az ε' paraméterből kapott x felosztásra $\Omega_x(f) < \varepsilon$ fog teljesülni, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

4. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (x_i)_{i=0, \dots, m}$ olyan felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \frac{\varepsilon}{n}$ teljesül, továbbá nézzük meg, hogy a D_n halmaz az osztópontok mely intervallumába metsz bele, ehhez definiáljuk a

$$J = \{i \in \{0, \dots, m-1\} \mid D_n \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset\}$$

indexhalmazt. Ha $i \in J$, akkor létezik olyan $x_0 \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre $x_0 \in D_n$ is teljesül. A D_n halmaz definíciója alapján ekkor létezik olyan $z \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre

$$|f(x_0) - f(z)| > \frac{1}{n}$$

teljesül. Ebből viszont a 9.19 tétel alapján

$$\omega(f, [x_i, x_{i+1}]) > \frac{1}{n}$$

következik. Felírva az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} > \Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \\ &\geq \sum_{i \in J} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i)\end{aligned}$$

adódik, amiből pedig

$$\sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

Mivel

$$D_n \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^m \{x_i\} \right) \cup \bigcup_{i \in J}]x_i, x_{i+1}[,$$

ezért a D_n halmaz lefedhető véges sok, tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumokkal, vagyis nulla mértékű.

9.8. Improprius integrál

9.31. Definíció. (Improprius integrál.)

- Legyen $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, \infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *improprius integrálja* az $[a, \infty[$ intervallumon és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *improprius integrálja divergens* az $[a, \infty[$ intervallumon.

- Ha $f :]-\infty, a[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, a], \mathbb{R})$ teljesül és a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *improprius integrálja* az $] -\infty, a]$ intervallumon, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

- Legyen $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *improprius integrálja* az $[a, b[$ intervallumon, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

- Legyen $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, b], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *improprius integrálja* az $]a, b]$ intervallumon, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.

9.32. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ függvényt.

1. Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a, \infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és ebben az esetben

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha-1)}.$$

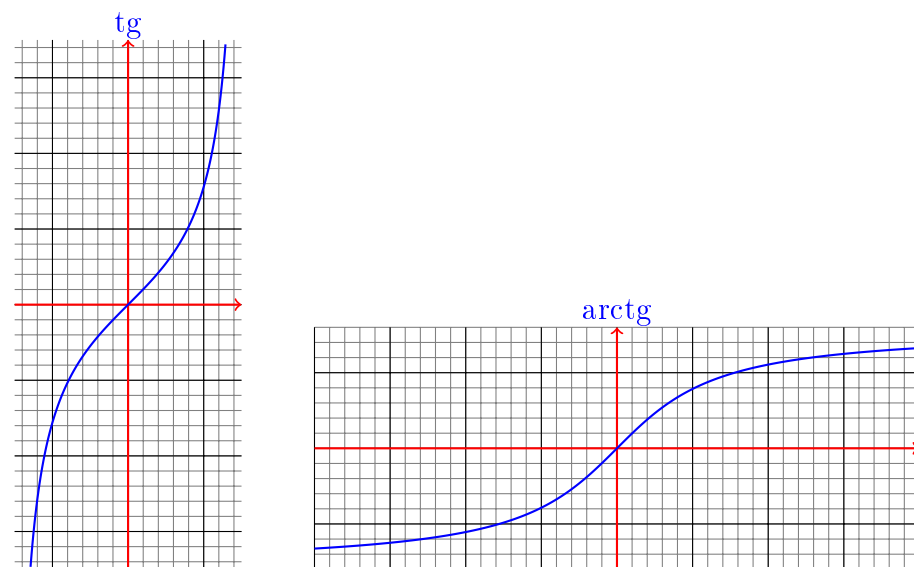
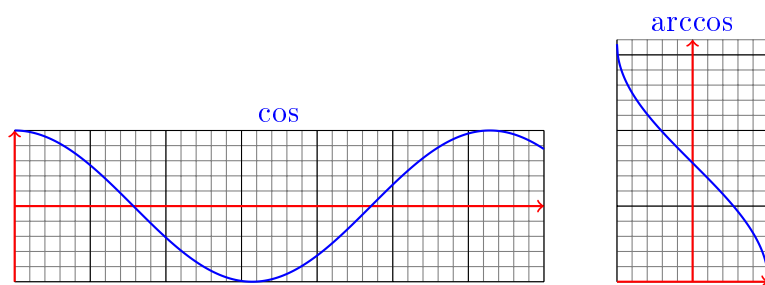
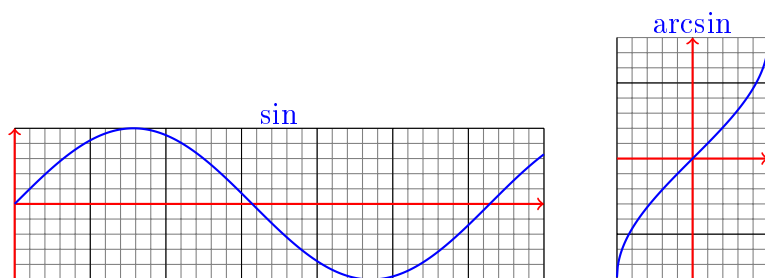
2. Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0, a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$ és ebben az esetben

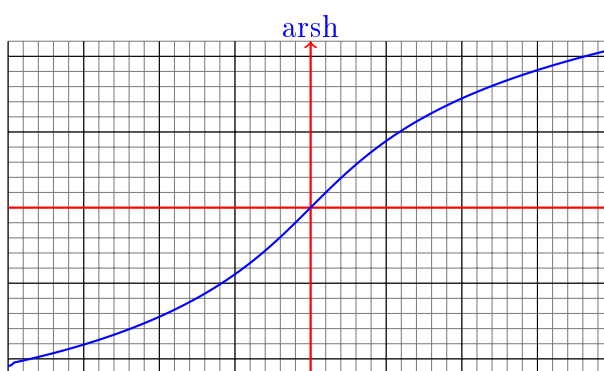
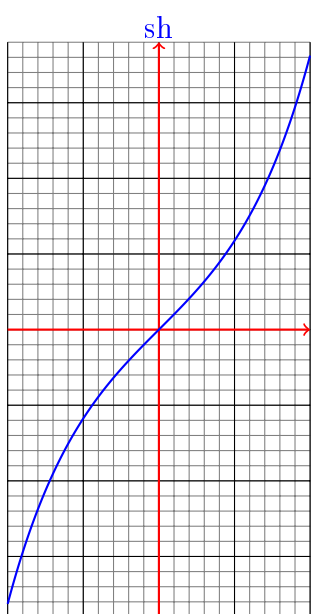
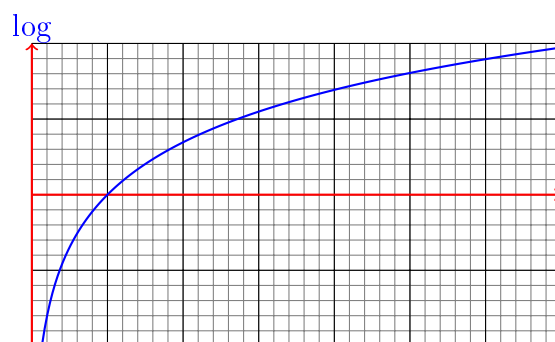
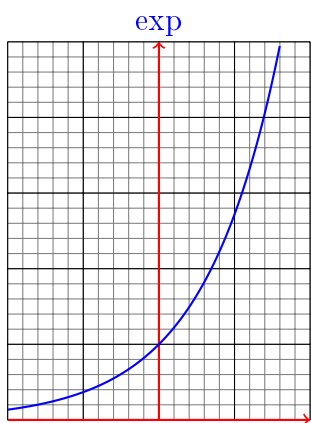
$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

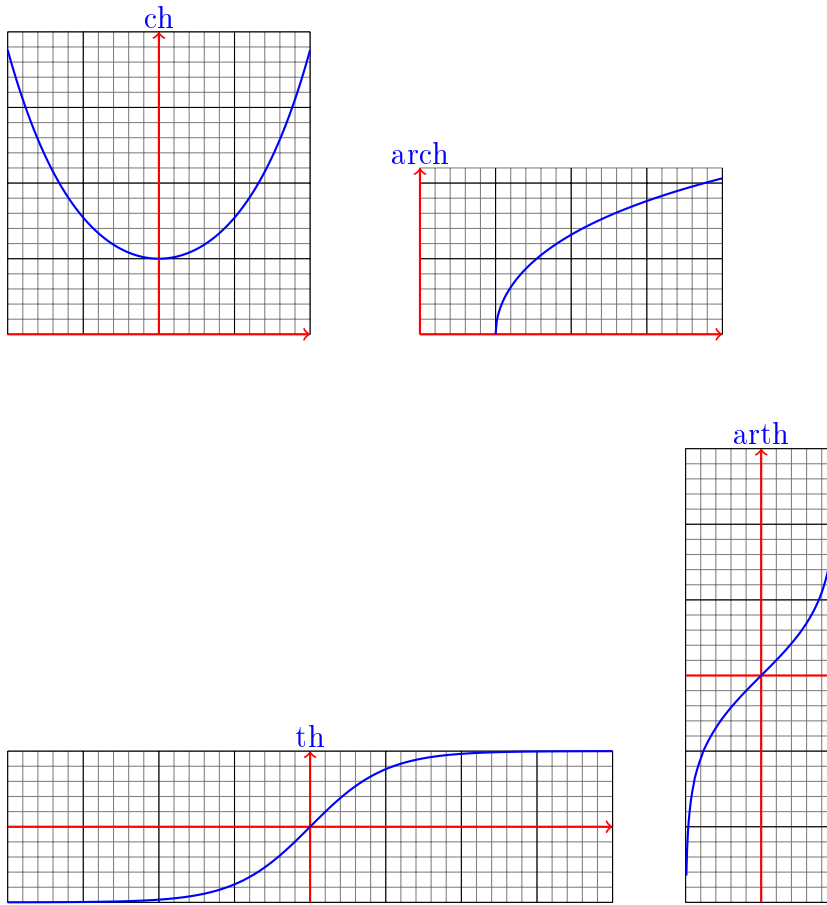
Bizonyítás. A 9.26 Newton–Leibniz-formula alapján rövid számolással igazolható.

10. Függelék

10.1. Az elemi függvények grafikonjai







10.2. Tizedestörtek

Magyarázat. Megszoktuk, hogy a valós számokat (esetleg végtelen) tizedestört alakban lehet felírni, most ennek adjuk meg a precíz matematikai bizonyítását.

10.1. Tétel. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Értelmezzük az

$$a(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha } n > 0; \\ [x], & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor

1. minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$;
2. $a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;
3. minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=0}^n \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;
4. $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;
5. végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N-1$;
6. legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és legyen $y = N^{n-1}x$. Ekkor

$$[N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N = [N([y] + \{y\})] - ([y] + \{y\}) \cdot N = N[y] + [N\{y\}] - [y]N = [N\{y\}],$$

vagyis $a(x)_n$ egész szám, továbbá $a(x)_n \leq N - 1$, hiszen ellenkező esetben $\{y\} \geq 1$ teljesülne.

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n}$ sor, mely konvergens.

3. Az $a(x)$ sorozat definíciója alapján n szerinti teljes indukcióval egyszerűen adódik.

4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \frac{a(x)_k}{N^k}$. Felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N^n x = [N^n x] + \{N^n x\}$$

és az előző pont eredményét

$$\alpha_n = \frac{N^n x - \{N^n x\}}{N^n} = x - \frac{\{N^n x\}}{N^n}$$

adódik, amiből pedig

$$|x - \alpha_n| < \frac{1}{N^n}$$

következik. Vagyis $\lim \alpha = x$.

5. Tegyük fel, hogy csak véges sok n természetes számra teljesül az $a(x)_n < N - 1$ egyenlőtlenség. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ természetes számra $a(x)_n = N - 1$. Tehát az

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

egyenlőség miatt

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

teljesül, ami ellentmond a 4. bizonyításában szereplő

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| < \frac{1}{N^{n_0}}$$

egyenlőtlenségnek.

6. Legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ olyan sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

teljesül, és tegyük fel, hogy $a(x) \neq b$. Legyen $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a(x)_n \neq b_n\}$. Ekkor

$$\frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melynek átrendezéséből

$$\left| \frac{a(x)_{n_0} - b_{n_0}}{N^{n_0}} \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n - b_n}{N^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(x)_n - b_n|}{N^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis $|a(x)_{n_0} - b_{n_0}| = 1$. Ha $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, akkor a fenti egyenlőtlenségben csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $n > n_0$ esetén

$$|a(x)_n - b_n| = N - 1.$$

Továbbá a két sor összege csak akkor egyezhet meg, ha $b_n \geq a(x)_n$. Tekintettel arra, hogy $b_n, a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ezért csak az $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$ megoldása van a fenti egyenlőtlenségnek. A $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ esetben a fentihez hasonló érveléssel azt kapnánk, hogy minden $n > n_0$ számra $a(x)_n = N-1$ és $b_N = 0$. Ekkor viszont

$$x = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0} + 1}{N^{n_0}}$$

adódik, vagyis az $a(x)$ sorozat definíciója alapján $a_{n_0} + 1 = a_{n_0}$, ami ellentmondás, tehát a $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ eset nem valósulhat meg.

Fordítva, ha $a(x) = b$, akkor a két sor összege nyilván megegyezik. Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$ és minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0} + 1}{N^{n_0}}$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \frac{1}{N^{n_0}} \end{aligned}$$

vagyis a két sor összege megegyezik.

10.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha } n > 0; \\ [x], & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \dots \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n},$$

melyet az x szám N alapú számrendszer vett felírásának nevezünk.

Magyarázat. A mindennapi életben az $N = 10$ választással élünk és ekkor az $x \in \mathbb{R}$ szám *tizedesjegyeiről* beszélünk. Továbbá a fenti állításból következik például az

$$1,9999\dots = 2$$

egyenlőség, vagyis a több olyan tizedesjegy-sorozat létezik, mely ugyan azt a valós számot határozza meg.

10.3. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Bizonyítás. Mivel a valós számok a racionális számok bizonyos részhalmazai (Dedekind-szeletei), ezért létezik $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ injektív leképezés, vagyis $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. Mivel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ezért $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Most a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{R}|$ formulát igazoljuk. Defináljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) & E &\mapsto s(E) := \left(n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin E; \\ 1, & \text{ha } x \in E. \end{cases} \right) \\ \rho : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) &\rightarrow \mathbb{R} & s &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k} \end{aligned}$$

Rövid számolással igazolható, hogy a φ függvény bijekció, valamint a ρ függvény a 10.1 állítás alapján injektív. Tehát $\rho \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ injektív leképezés, vagyis $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Tehát $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, vagyis az 1.58 Schröder–Bernstein-tétel alapján $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

10.3. Valós számok szögfüggvényei

10.4. Tétel. A $\sin$ és $\cos$ függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. A $\sin$ és $\cos$ függvény 2π szerinti periodicitása miatt az

$$x' = x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor$$

számra $\sin x = \sin x'$ és $\cos x = \cos x'$ teljesül, valamint $0 \leq x' < 2\pi$. Ekkor az 5.39 addíciós formulák és a 6.42 nevezetes szögek szögfüggvényei alapján

$$\sin x = \begin{cases} \sin x', & \text{ha } 0 \leq x' < \frac{\pi}{2}; \\ \cos\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x' < \pi; \\ -\sin(x' - \pi), & \text{ha } \pi \leq x' < \frac{3\pi}{2}; \\ -\cos\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{3\pi}{2} \leq x' < 2\pi, \end{cases}$$

valamint

$$\cos x = \begin{cases} \cos x', & \text{ha } 0 \leq x' < \frac{\pi}{2}; \\ -\sin\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x' < \pi; \\ -\cos(x' - \pi), & \text{ha } \pi \leq x' < \frac{3\pi}{2}; \\ \sin\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{3\pi}{2} \leq x' < 2\pi \end{cases}$$

adódik.

10.5. Tétel. A $\cos$ függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.

Bizonyítás. Minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, továbbá az addíciós tétel alapján

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ezért ha ismerjük a koszinusz függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon, akkor itt a szinusz függvény értékeit is ismerjük, vagyis a 10.4 tétel alapján minden valós szám szögfüggvényét ismerjük.

10.6. Tétel. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor a $\cos$ függvényre vonatkozó 5.39 addíciós formula alapján

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \begin{cases} 2\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right) - 1; \\ 1 - 2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right). \end{cases}$$

Mivel $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és ekkor $\sin x, \cos x \geq 0$, ezért a fenti egyenletek átrendezéséből adódik az állítás.

10.7. Tétel. $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Bizonyítás. Elég a $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ formulát igazolni, hiszen $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}$. Megmutatjuk, hogy $2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ugyanis ebből már a félszögek szöggfüggvényeiről szóló 10.6 tétel alapján már adódik az állítás. Legyen $x = e^{i \frac{2\pi}{5}}$ és $q = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$. Ekkor az 5.31 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} = q,$$

valamint $x^5 = 1$, vagyis

$$0 = x^5 - 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Tehát elég az $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ egyenletet kell megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve. Ez viszont egyszerű a

$$0 = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 \right) = x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right) = x^2 (q^2 + q - 1)$$

átalakítások, valamint a $q > 0$ feltétel miatt,

$$q = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

10.8. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x \frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x = \frac{\pi}{6}$ esetén $x = 30^\circ$.)

10.9. Tétel.

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{16} - (\sqrt{3} - 1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{8} \\ \cos 3^\circ &= (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{8} + (\sqrt{3} - 1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \frac{\pi}{5}$ és $\beta = \frac{\pi}{6}$. Ekkor $\alpha = 36^\circ$ és $\beta = 30^\circ$. Az α és a β szöggfüggvényeit ismerjük a 10.7 és a 6.42 tételből. Az 5.39 addíciós formula alapján

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} - \sqrt{5}}{8}.$$

A félszögekre vonatkozó 10.6 tétel segítségével az $\frac{\alpha - \beta}{2} = 3^\circ$ szinusza és koszinusza éppen a tételben leírt értéket adja.

Kiegészítés. Ennek alapján meghatározható a $k \cdot 3^\circ$ alakú számok szinusza és koszinusza, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (Sőt, a szögfelezésre vonatkozó tétel felhasználásával tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\frac{k}{2^n} \cdot 3^\circ$ szöggfüggvényei is kiszámolhatók explicit alakban.) Az alábbiakban a kifejezések szimmetriája szerinti elrendezésben szerepelnek a szögek koszinuszai.

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \cos 0^\circ = 1 & \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} & \cos 90^\circ = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \cos 15^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ \cos 75^\circ = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 27^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \\ \cos 63^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} & \cos 81^\circ = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 12^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 24^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 48^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 84^\circ = \sqrt{3}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-\sqrt{5}}{8} \\ \cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{-1+\sqrt{5}}{8} & \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1+\sqrt{5}}{8} \\ \cos 78^\circ = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1-\sqrt{5}}{8} & \cos 66^\circ = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3}\frac{1+\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 3^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 21^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 33^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 39^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 57^\circ = \frac{(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 51^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 87^\circ = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} & \cos 69^\circ = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} + \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

◇

10.10. Tétel.

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{17} + 15 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 2(3 + \sqrt{17})} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}$$

Bizonyítás. Elég $2 \cos \frac{2\pi}{17}$ értékét meghatározni, ugyanis ebből már a félszögek szögfüggvényeiről szóló 10.6 tétel alapján már adódik az állítás.

Legyen $x = \exp\left(i \frac{2\pi}{17}\right)$ és $q = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$. Ekkor az 5.31 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{17} = q,$$

valamint $x^{17} = 1$, vagyis

$$0 = x^{17} - 1 = \frac{x^{17} - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{16} x^k.$$

Tehát az

$$\sum_{k=0}^{16} x^k = x^8 \cdot \sum_{k=-8}^8 x^k = 0$$

átalakítás miatt elég az

$$\alpha_0 = \sum_{k=-8}^8 x^k = 0$$

egyenletet megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve.

A 17 Fermat-prím, ugyanis $n = 2$ esetén $17 = 2^{(2^n)} + 1$. Legyen $p = 17$ és válasszunk egy olyan $g \in \mathbb{N}$ számot, melyre

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

teljesül. A továbbiakban a $g = 3$ választással élünk. Az $i \in \{1, 2, 3\}$ esetben definiáljuk az alábbi polinomot.

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{2^{(2^n-i)}-1} x^{g^k(2^i)}$$

Az $x^{17} = 1$ felhasználásával az alábbi polinomokat kapjuk.

$$\alpha_1 = x^{-8} + x^{-4} + x^{-2} + x^{-1} + x + x^2 + x^4 + x^8$$

$$\alpha_2 = x^{-4} + x^{-1} + x + x^4$$

$$\alpha_3 = x^{-1} + x$$

A háttérben meghúzódó mélyebb okok részletezése nélkül megemlítjük, léteznek olyan $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ polinomok és $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre

$$\alpha_0 = a_1 \alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 + \beta_1$$

$$\alpha_0 = a_2 \alpha_2^2 + b_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_2$$

$$\alpha_0 = a_3 \alpha_3^2 + b_2 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_3$$

teljesül, ahol $\beta_1 \in \mathbb{R}$, β_2 kifejezhető az α_1 polinommal és β_3 kifejezhető az α_1, α_2 polinommal. Valóban, számolással ellenőrizhető, hogy

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} \alpha_1^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 - 1$$

$$\alpha_0 = -\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 + 1$$

$$\alpha_0 = 2\alpha_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 + (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2 - 3).$$

Tehát az $\alpha_0 = 0$ miatt az első egyenlet alapján

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Ekkor a második

$$\alpha_2^2 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \alpha_2 - 1 = 0$$

egyenlet miatt

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}.$$

Ezek után a harmadik egyenlet megoldható az α_3 változóra nézve, ami a keresett q érték.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban bemutatott módon lehet meghatározni $\cos \frac{\pi}{257}$ és $\cos \frac{\pi}{65537}$ értékét. $\diamond$

10.4. Jensen-tétel következményei

10.11. Tétel. (Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a, b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \geq f \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 6.2 Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása az $x_1, \dots, x_n$ pontokra és a $S = \sum_{i=1}^n \omega_i$ jelölés mellett az $\frac{\omega_1}{S}, \dots, \frac{\omega_n}{S}$ súlyokra.

10.12. Tétel. (Súlyozott hatványközep.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméterre

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^r}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & \text{ha } r \neq 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) & \text{ha } r = 0, \end{cases}$$

függvény monoton növekszik.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint minden $i = 1, \dots, n$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $S = \sum_{i=1}^n \omega_i$ jelölés mellett vezessük be minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $a_i = \frac{\omega_i}{S}$ paramétereket, valamint minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$\alpha(r) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ekkor nyilván $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk meg a $\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r)$ határértéket.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{r} \cdot \log \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right) \right) = \exp \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dr} \log \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right) \right) = \\ &= \exp \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i x_i^r} \sum_{i=1}^n a_i x_i^r \log x_i = \exp \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \sum_{i=1}^n a_i \log x_i \right) = \\ &= \exp \left(\sum_{i=1}^n a_i \log x_i \right) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \end{aligned}$$

Vagyis a súlyozott hatványközep határértéke a 0 pontban a súlyozott geometriai közép.

Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olyan melyre $0 < r_1 < r_2$ teljesül és tekintsük az

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^{\frac{r_2}{r_1}}$$

függvényt. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f''(x) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) x^{\frac{r_2}{r_1} - 2} > 0$$

teljesül, vagyis f konvex függvény. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ekkor

$$f \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i^{r_1})$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \\ \alpha(r_1) &\leq \alpha(r_2). \end{aligned}$$

Az $r_1 < r_2 < 0$ esetben az f függvény konkavitását kihasználva hasonló számolással adódik az $\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2)$ egyenlőtlenség.

Azt kell még igazolni, hogy minden $r_1 < 0$ és $r_2 > 0$ esetén

$$\alpha(r_1) \leq \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2).$$

Ehhez elég felírni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(x_i^{r_2})_{i=1,\dots,n}$ számokra

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (x_i^{r_2})^{a_i} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \right)^{r_2} &\leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \\ \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} &\leq \alpha(r_2), \end{aligned}$$

illetve hasonló módon az $(x_i^{r_1})_{i=1,\dots,n}$ számokra.

Megjegyzés. Az előző tételt az $\omega_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ paraméterekre alkalmazva az $f(-1) \leq f(0) \leq f(1)$ összefüggés adja a harmonikus-számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

◇

10.5. Wallis- és Stirling-formula

10.13. Tétel. (Wallis-formula.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

sorozatot. Ekkor elemi számolás alapján $a_0 = \frac{\pi}{2}$ és $a_1 = 1$ nyilván teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a parciális integrálás szabályát felhasználva

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \, dx = [-\cos x \cdot \sin^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^n x \, dx = \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^n x \, dx = (n+1)(a_n - a_{n+2}) \end{aligned}$$

adódik, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$. Ennek a segítségével teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

teljesül. Szintén teljes indukcióval adódik az állításban szereplő formulára a

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi}{2a_{2n}}$$

felírás, tehát a bizonyítandó formula ekvivalens a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n}a_{2n}} = \sqrt{\pi}$$

határértékkel, amihez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4na_{2n}^2 = \pi$$

teljesül.

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

továbbá az a sorozat monoton fogyó, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = a_{2n}a_{2n+1} \leq a_{2n}^2 \leq a_{2(n-1)}a_{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

teljesül, amiből az

$$\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq 4na_{2n}^2 \leq \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4na_{2n}^2 = \pi$$

adódik, amivel igazoltuk az állítással ekvivalens a 202 határértéket.

10.14. Tétel. (Stirling-formula.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right)$$

becslés.

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$A :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-közelítése alapján minden $x \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $c \in [0, x]$ paraméter, melyre

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!} x^4$$

teljesül, vagyis

$$g(x) = -\frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!} x^4,$$

amiből következik, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$0 \geq g(x) \geq -\frac{x^4}{4}.$$

Tekintsük a

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \log \left(\frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right)$$

sorozatot, amit $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1)$$

alakban is felírhatunk. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(b_{k+1} - b_k) = (n-1)b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1,$$

ezt alkalmazva a $b_k = \log k$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) = (n-1) \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) = \log n$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1) = \\ &= (n-1) \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + \frac{1}{2} \log n - n \log n + n = \\ &= -\frac{1}{2} \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \\ &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Az a sorozat ezen alakját kifejezhetjük a g függvény segítségével.

$$\begin{aligned} a_n &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(g\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) = \\ &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ és az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$ sorozatnak létezik határértéke. A $\sum_k \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right)$ sor abszolút konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty$$

teljesül, ezért konvergens is. Vagyis az a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim a$. Mivel a sorozat minden részsorozata konvergens ugyan azzal a határértékkal ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ is teljesül, és ezek alapján

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2a_n}}{e^{a_{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{2\pi},$$

ahol felhasználtuk a Wallis-formulát. Tehát $A = \frac{1}{2} \log(2\pi)$, amiből

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

következik. Továbbá

$$\begin{aligned} n! &= e^{a_n} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = e^{a_n - A} \cdot e^A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \left(1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \right) \right) = \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \left(\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

teljesül. A

$$\begin{aligned} \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \\ -\frac{1}{4} \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4} dx &\leq \sum_{k=n}^{\infty} -\frac{1}{4k^4} \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) 0 = 0 \end{aligned}$$

becslések alapján

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3} \right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \left(\frac{n}{12(n-1)^2} \right)$$

teljesül.

10.15. Tétel. Legyen

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n \in \mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq a_n \leq 1$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ahhoz hogy az

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

sorozat monoton csökkenésig igazoljuk, azt kell megmutatnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Ezt ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n &\geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \\ -\log n &\geq \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \\ \log\left(\frac{n+1}{n}\right) &\geq \frac{1}{n+1} \\ (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq 1 \\ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq 1 \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq e \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \end{aligned}$$

adódik. Tehát elég azt igazolni, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ehhez tekintsük az $a_1 = \dots = a_m = 1 + \frac{1}{m}$ és a $b_1 = \dots = b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} \sqrt[n+m+1]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1}} &\leq \frac{m\left(1 + \frac{1}{m}\right) + (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}}{m+n+1} = \frac{m+1+n}{m+n+1} = 1 \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} &\leq 1 \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Mivel $a_1 = 1$ és a monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq 1$. Az alsó becsléshez minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén tekintük az

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

átalakítást. Mivel az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény konvex, ezért minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén minden $x \in [k, k+1]$ számra a $t = k+1-x \in [0, 1]$ paraméter mellett

$$\begin{aligned} f(tk + (1-t)(k+1)) &\leq tf(k) + (1-t)f(k+1) \\ f(x) &\leq \frac{k+1-x}{k} + \frac{x-k}{k+1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x)$$

teljesül, vagyis

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right).$$

Ezek alapján minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

10.16. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

Kiegészítés. Még nem ismert, hogy γ racionális szám-e.

◇

10.6. A gamma függvény

10.17. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

improprius integrál konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$.

Az $x = 1$ esetben egyszerű számolással igazolható az improprius integrál konvergenciája.

Ha $x \in]0, 1[$, akkor megmutatjuk, hogy az

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

improprius integrál konvergens, tehát ezek összege is konvergens.

Tekintsük az

$$I :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_a^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton csökkenő és a minden $a \in]0, 1]$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_a^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^a t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$ határérték, vagyis az első integrál is konvergens.

Tekintsük az

$$I : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_1^a t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növekvő és a minden $a \in [1, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_1^a t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^a e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-a} \leq e^{-1}$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ határérték, vagyis a második integrál is konvergens.

Ha $x \in]1, \infty[$, akkor az $a = x - 1$ paraméter pozitív. Legyen $n = [a] + 1$. A L'Hospital-szabályt n -szer alkalmazva kapjuk a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

határértéket, ami alapján létezik olyan $t_0 \in]1, \infty[$, hogy minden $t \in]t_0, \infty[$ számra

$$\frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} < 1.$$

Ekkor minden $t_0 < t$ paraméterre

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^n e^{-t} \leq e^{\frac{t}{2}} e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}}$$

teljesül. Tekintsük az

$$I : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_{t_0}^a t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növekvő és a minden $a \in [t_0, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) \leq \int_{t_0}^a e^{-\frac{t}{2}} dt = 2 - 2e^{-\frac{a}{2}} \leq 2$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ határérték. Vagyis az

$$\int_0^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

összeg létezik, ami nem más mint $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

10.18. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

10.19. Tétel. (Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)

1. $\Gamma(1) = 1$
2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n! = \Gamma(n+1)$ teljesül.

Bizonyítás. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-a} + 1 = 1$.

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén parciális integrállással számolva

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow \infty} [t \cdot t^{x-1} e^{-t}]_0^a - \int_0^\infty t ((x-1)t^{x-2} e^{-t} - t^{x-1} e^{-t}) dt = \\
&= -(x-1) \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt + \int_0^\infty t^x e^{-t} dt
\end{aligned}$$

adódik, vagyis

$$\Gamma(x) = -(x-1)\Gamma(x) + \Gamma(x+1).$$

3. Az első két állítás segítségével n szerinti teljes indukcióval igazolható.

10.7. Az analitikus számelmélet pár tétele

10.20. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

1. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in]0, 1[$ esetén $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$.
2. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$$

függvényt. Ha $x \in]0, 1[$, akkor

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$$

nyilván teljesül.

Legyen $m, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a k paraméter szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy a $\text{id}_{\mathbb{R}}^m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{id}_{\mathbb{R}}^m(x) = x^m$) függvényre

$$(\text{id}_{\mathbb{R}}^m)^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}, & \text{ha } k \leq m \\ 0, & \text{ha } k > m \end{cases}$$

teljesül. Ezért

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(x) &= \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \text{id}_{\mathbb{R}}^n \binom{n}{i} (-\text{id}_{\mathbb{R}})^i \right)^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (\text{id}_{\mathbb{R}}^{n+i})^{(k)}(x) = \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, & \text{ha } k \leq n+i \\ 0, & \text{ha } k > n+i \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

vagyis

– ha $0 \leq k < n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k},$$

tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$;

– ha $n \leq k \leq 2n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k},$$

tehát

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-n}}{(n-(k-n))!(k-n)!} \cdot \frac{(n+k-n)!}{(n+k-n-k)!} = \frac{(-1)^{k-n}k!}{(2n-k)!(k-n)!} = (-1)^{k-n} \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!},$$

amiből $\binom{k}{k-n}, \frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z}$ miatt $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ következik;

– ha $2n < k$, akkor $f_n^{(k)}(x) = 0$, tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f_n(x) = f_n(1-x)$ érvényes, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

10.21. Tétel. *A π^2 szám irracionális.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $a, b \in \mathbb{N}^+$ pár melyre $\pi^2 = \frac{a}{b}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. A 10.20 állítás alapján $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) &= b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) + b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= b^n \sum_{k=1}^{n+1} -(-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= b^n (-1)^{n+2} \pi^0 f_n^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x) \end{aligned}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $2n$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(2n+2)} = 0$.

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n''(x) \sin(\pi x) + \pi F_n'(x) \cos(\pi x) - \pi F_n'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x) \sin(\pi x) = a^n \pi^2 f_n(x) \sin(\pi x),$$

ezért

$$a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} (\varphi_n(1) - \varphi_n(0)) = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

Valamint a 10.20 állításban szereplő becslés alapján

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx < \frac{\pi a^n}{n!}$$

teljesül. Mivel a 4.35 állítás miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| \frac{\pi a^n}{n!} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx$ olyan egész szám lenne, mely

a $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ intervallumban helyezkedik el, ezzel ellentmondást kaptunk.

10.22. Tétel. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x-\alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

1. Minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ szám esetén $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.
2. Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
3. Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x-\alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

A binomiális kifejtési tétel alapján a g_n függvény a

$$g_n(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} (x-\alpha)^{2l}$$

alakban is felírható. Tehát a 10.20 tétel bizonyításában részletezett deriválási szabály alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \begin{cases} \frac{(2l)!}{(2l-k)!} (x-\alpha)^{2l-k}, & \text{ha } k \leq 2l; \\ 0, & \text{ha } k > 2l. \end{cases}$$

1. A fenti felírásból rögtön adódik, hogy minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ számra $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ teljesül.
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel $k = 2m$ alakban.
Ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, vagyis $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \frac{(2l)!}{(2l-2m)!} 0^{2l-2m}.$$

Tehát ha $m < n$, akkor $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ha $n \leq m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(2n-1-m)!} a^{4n-2m-2} b^{2m+1-n} \frac{(2m)!}{1} \cdot 1.$$

Mivel $0 \leq 4n-2m-2$ és $0 \leq 2m+1-n$, ezért $a^{4n-2m-2}, b^{2m+1-n} \in \mathbb{N}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont a

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} = \binom{2n-1}{m} \cdot \frac{(2m)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{m!}{(m-n)!}$$

felbontásból látszik, hiszen $\binom{2n-1}{m}, \frac{(2m)!}{(2n-1)!}, \frac{m!}{(m-n)!} \in \mathbb{N}^+$.

3. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel a $k = 2m$ alakban. A g_n függvény a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1} (a-bx)^{2n} (2a-bx)^n}{(n-1)!}$$

alakjából világos, hogy egy $4n-2$ fokszámú polinom, amit fel lehet írni a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^l = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^{n-1+l}$$

formában, ahol $c_0, \dots, c_{3n-1} \in \mathbb{Z}$. Ebből

$$g_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(n-1+l)!}{(n-1+l-2m)!} x^{n-1+l-2m}, & \text{ha } 2m \leq n-1+l; \\ 0, & \text{ha } 2m > n-1+l \end{array} \right\}$$

adódik.

Vagyis ha $m > 2n-1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, ezért $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ha $m < \frac{n-1}{2}$, akkor $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ szintén teljesül.

Ha $\frac{n-1}{2} \leq m \leq 2n-1$, akkor

$$g_n^{(2m)}(0) = \frac{1}{(n-1)!} c_{2m-n+1} \frac{(n-1+2m-n+1)!}{1} \cdot 1 = c_{2m-n+1} \frac{(2m)!}{(n-1)!}$$

ami a $n-1 \leq 2m$ egyenlőtlenség miatt egész szám.

10.23. Tétel. Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor e^x irracionális.

Bizonyítás. A minden $x \in \mathbb{R}$ számra érvényes $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ összefüggés miatt elég minden $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ számra igazolni az állítást.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha = \frac{a}{b}$ és $e^\alpha = \frac{c}{d}$ teljesül, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$.

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x-\alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x)$$

függvényt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_n''(x) &= \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{2n} f_n^{(2k)}(x) = \\ &= f_n(x) - f_n^{(4n)}(x) = f_n(x) \end{aligned}$$

teljesül, ugyanis f_n egy $4n-2$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(4n)} = 0$.

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F_n(x) \operatorname{ch}(x) - F_n'(x) \operatorname{sh}(x).$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n'(x) \operatorname{ch}(x) + F_n(x) \operatorname{sh}(x) - F_n''(x) \operatorname{sh}(x) - F_n'(x) \operatorname{ch}(x) = f_n(x) \operatorname{sh}(x),$$

ezért

$$\int_0^\alpha f_n(x) \operatorname{sh}(x) \, dx = \varphi_n(\alpha) - \varphi_n(0) = F_n(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha) - F_n'(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha) - F_n(0).$$

A 10.22 alapján $F_n'(\alpha) = 0$ és $F_n(\alpha), F_n(0) \in \mathbb{Z}$. Továbbá az $e^\alpha = \frac{c}{d}$ feltevés miatt $\operatorname{ch} \alpha = \frac{p}{q}$ alakú,

ahol $p = c^2 + d^2$, $q = 2cd$, vagyis $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ezért

$$Z_n = q \int_0^\alpha f_n(x) \operatorname{sh}(x) \, dx \in \mathbb{Z}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel minden $0 < x < \alpha$ számra $0 < f_n(x), \text{sh}(x)$, ezért $0 < Z_n$, valamint minden $0 < x < \alpha$ számra

$$f_n(x) \text{sh}(x) \leq b^{3n-1} \frac{\alpha^{2n} (\alpha^2)^{n-1}}{(n-1)!} \text{sh} \alpha = a^2 \text{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!},$$

ezért

$$Z_n \leq a^2 \alpha \text{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Mivel a 4.35 állítás miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| a^2 \alpha \text{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén Z_n olyan egész szám lenne, melyre $0 < Z_n < \frac{1}{2}$ teljesülne.

10.24. Tétel. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén előlje $\mathcal{P}_n$ az n számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} \geq \log \log n - 2.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül, ebből viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

adódik.

Ha $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, akkor a 7.40 tétel alapján

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

teljesül, aminél felhasználva, hogy $x \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} &= x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+3} \leq x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{2} = \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + x^2 \end{aligned}$$

adódik, vagyis minden $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} \leq x + x^2.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ekkor az $f, g : [1, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k, k+1[} + \frac{1}{n} \chi_{[n, n+1[}$$

függvényekre minden $x \in [1, n+1]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, ezért

$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{n+1} g.$$

Mivel

$$\int_1^{n+1} f = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \quad \text{és} \quad \int_1^{n+1} g = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

és a log függvény monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

teljesül.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 3$. Minden p prímszám esetén legyen $\mu_p(n)$ az az egyértelműen meghatározott egész szám, melyre

$$p^{\mu_p(n)-1} \leq x < p^{\mu_p(n)}$$

teljesül. Defináljuk az

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\mu_p(n)} \frac{1}{p^k}$$

számot. A számelmélet alaptétele szerint minden pozitív természetes szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára. Ezért az

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1^{\mu_{p_1}(n)}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_2^{\mu_{p_2}(n)}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_k^{\mu_{p_k}(n)}}\right)$$

szorzatban minden $\frac{1}{k}$ alakú szám előfordul $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ezért

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} > A(n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \log n,$$

aminek a logaritmusát véve

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p^2} > \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \log \log x.$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

10.25. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

Megjegyzés.

10.26. Tétel. (Az algebrai számok alaptulajdonságai.)

1. Az algebrai számok rendezett testet alkotnak.
2. Ha egy polinom együtthatói algebrai számok, akkor a polinom gyökei is algebrai számok.
3. Az algebrai számok halmaza megszámlálható.
4. Az algebrai számok halmaza nulla mértékű.

◇

10.27. Tétel. Az e szám transzcendens.

Bizonyítás. Minden $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ polinom esetén legyen $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n |a_i| x^i$ és

$$I_p : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \int_0^t e^{t-x} p(x) \, dx.$$

Parciális integrálással

$$I_p(t) = e^t \sum_{i=0}^n p^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^n p^{(i)}(t)$$

adódik, valamint egyszerűen becsülhető $|I_p(t)|$

$$|I_p(t)| \leq |t| \cdot \left(\sup_{x \in [0, t]} |e^{t-x}| \right) \cdot \left(\sup_{x \in [0, t]} |p(x)| \right) \leq t e^t \tilde{p}(t).$$

Tegyük fel, hogy e gyöke a

$$p(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$$

polinomnak, ahol minden $i = 0, \dots, r$ esetén $a_i \in \mathbb{Z}$, valamint $a_0, a_r \neq 0$. Legyen p olyan prímszám, melyre $p > \max\{r, |a_0|\}$ teljesül. Legyen $f(x) = x^{p-1} \prod_{i=1}^r (x-i)^p$ és tekintsük a $J = \sum_{i=0}^r a_i I_f(i)$ számot,

melynek definíciójából adódik, hogy $J \in \mathbb{Z}$. Mivel $p(e) = 0$, ezért $J = - \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$, amit átírhatunk a

$$J = - \sum_{j=p-1}^{(r+1)p-1} a_0 f^{(j)}(0) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=p}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$$

alakba. Itt a jobb oldalon minden tagnak osztója a $p!$ kivéve az $a_0 f^{(p-1)}(0) = a_0 (p-1)! (-1)^{rp} (r!)^p$ tagot. Mivel $p > |a_0|$ ezért $|J|$ olyan egész, melynek nem oszthatója a $p!$, de $(p-1)!$ már igen, ezért $(p-1)! \leq |J|$. Valamint minden $k = 0, \dots, r$ szám esetén

$$|I_f(k)| \leq k e^k \tilde{f}(k) = k e^k k^{p-1} \prod_{i=1}^r (k+i)^p \leq e^k (2r)^{(r+1)p}.$$

Vagyis

$$|J| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| |I_f(k)| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| e^k (2r)^{(r+1)p} \leq \alpha \beta^p,$$

ahol $\alpha = \sum_{k=0}^r |a_k| e^k$ és $\beta = (2r)^{r+1}$. Tehát az alábbi becslésünk adódik

$$1 \leq \frac{|J|}{(p-1)!} \leq \frac{\alpha \beta^p}{(p-1)!},$$

ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \beta^n}{(n-1)!} = 0$.

Kiegészítés. Ismeretlen, hogy többek között az $e \pm \pi$, az $e\pi$ és a $\zeta(3)$ számok algebrai számok-e. $\diamond$

Tárgymutató

- arccos, 74, 85
- arcsin, 74, 85
- cos, 74, 85
- exp, 85
- ln, 53
- log, 53, 85
- arch, 77, 85
- arctg, 74, 85
- arsh, 77, 85
- arth, 77, 85
- ch, 77, 85
- e, 51, 53
- sh, 77, 85
- tg, 74, 85
- th, 77, 85
- π , 70
- sin, 74, 85

- Abel-átrendezés, 50
- Abel-féle konvergenciakritérium, 50
- abszolút érték, 16
- abszolút konvergens sor, 43
- alsó integrál, 108
- alsó közelítő összeg, 106
- alsó korlát, 7, 10
- area
 - koszinusz hiperbolikus, 77, 85
 - szinusz hiperbolikus, 77, 85
 - tangens hiperbolikus, 77, 85
- arkhimédészi módon rendezett test, 11
- arkusz
 - koszinusz, 74, 85
 - szinusz, 74, 85
 - tangens, 74, 85
- aszimptota, 82
- átrendezés, 47
- átviteli elv
 - folytonosságra, 64
 - határértékre, 60

- bal oldali határérték, 61
- befedés, 25
- belső pont, 22
- belseje egy halmaznak, 22
- Bernoulli-egyenlőtlenség, 15
- bijekció, 4
- binomiális tétel, 16
- binomiális-sorfejtés, 95
- Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétele, 32
- Bolzano–Weierstrass-tétel, 32
- Bolzano-tétel, 67
- Borel–Lebesgue-tétel, 25

- Cantor
 - $\sim$ -féle közösrész tétel, 24, 25
 - $\sim$ -tétel, 5
 - halmaz, 105
- Cauchy
 - $\sim$ –Hadamard-tétel, 51
 - $\sim$ -féle gyökkritérium, 45
 - $\sim$ -féle maradéktag, 91
 - $\sim$ -kritérium, 34, 41
 - $\sim$ -sorozat, 34
 - $\sim$ -szorzat, 48
 - $\sim$ -tétel, 83

- D’Alembert-féle hányadoskritérium, 46
- Descartes-szorzat, 3
 - halmazrendszer $\sim a$, 6
- diffeomorf
 - függvény, 79
- diffeomorfizmus, 79
- differentiálható
 - n -szer $\sim$ függvény, 88
 - n -szer folytonosan $\sim$ függvény, 88
 - függvény, 79
 - végtelesszer $\sim$ függvény, 88
- divergens
 - imprius integrál, 118
 - sor, 41
 - sorozat, 27

- e, 53
- egyenlőtlenség
 - Hölder- $\sim$, 89
 - Jensen- $\sim$, 55
 - Minkowski- $\sim$, 90
 - számtani-mértani $\sim$, 17, 89
- egyenletesen folytonos függvény, 68
- ekvipotens, 12
- ekvivalenciaosztály, 8
- ekvivalenciareláció, 8
- elemi függvények deriváltja, 82
- elemi függvények inverze, 85
- elsőfajú szakadás, 66
- Euler képlet, 72
- Euler-tétel, 52
- exponenciális függvény, 51
- érintési pont, 22
- érintő, 91

- függvény, 4
 - $\sim$ ek érintkezése, 92
 - n -szer differentiálható $\sim$, 88
 - n -szer folytonosan differentiálható $\sim$, 88
 - érintője, 91
 - alsó integrálja, 108

- aszimptotája, 82
- bal oldali határértéke, 61
- bijektív $\sim$, 4
- differenciálható $\sim$, 79
- egyenletesen folytonos $\sim$, 68
- elsőfajú szakadása, 66
- exponenciális $\sim$, 51
- felső integrálja, 108
- folytonos $\sim$, 62
- folytonosan differenciálható $\sim$, 79
- gyöke, 55
- határértéke, 56
- határozatlan integrálja, 97
- határozott integrálja, 108
- improprius integrálja, 118
- injektív $\sim$, 4
- inklúzió $\sim$, 7
- integrálja, 108
- inverze, 5
- jobb oldali határértéke, 61
- konkáv $\sim$, 55
- konvex $\sim$, 55
- koszinusz $\sim$, 51
- koszinusz hiperbolikus $\sim$, 51
- kotangens $\sim$, 51
- kotangens hiperbolikus $\sim$, 51
- lokális maximuma, 92
- lokális minimuma, 92
- lokális szélsőértéke, 92
- másodfajú szakadása, 66
- megszüntethető szakadása, 66
- monoton $\sim$, 55
- monoton fogyó $\sim$, 55
- monoton növény $\sim$, 55
- nyeregponja, 118
- oszcillációja, 109
- páratlan $\sim$, 55
- páros $\sim$, 55
- periódusa, 55
- periodikus $\sim$, 55
- primitív $\sim$, 97
- projekció $\sim$, 7
- Riemann-integrálja, 108
- szűrjektív $\sim$, 4
- szakadása, 66
- szigorú lokális maximuma, 92
- szigorú lokális minimuma, 92
- szigorú lokális szélsőérték, 92
- szigorúan monoton $\sim$, 55
- szigorúan monoton fogyó $\sim$, 55
- szigorúan monoton növény $\sim$, 55
- szinusz $\sim$, 51
- szinusz hiperbolikus $\sim$, 51
- tangens $\sim$, 51
- tangens hiperbolikus $\sim$, 51
- végtelesszer differenciálható $\sim$, 88
- zérushelye, 55
- faktoriális, 16
- felosztás, 106
 - alsó közelítő összege, 106
 - felső közelítő összege, 106
- felosztások egyesítése, 106
- felső integrál, 108
- felső közelítő összeg, 106
- felső korlát, 7, 10
- feltételesen konvergencia sor, 47
- feltétlen konvergencia sor, 47
- finomabb felosztás, 106
- folytonos
 - $\sim$ an differenciálható függvény, 79, 88
 - egyenletesen $\sim$ függvény, 68
 - függvény, 62
- folytonosság topologikus jellemzése, 65, 66
- formula, 1
 - $\sim$ k ekvivalenciája, 2
- gyök, 55
 - n -edik $\sim$, 15
- gyökkritérium, 45
- Hölder-egyenlőtlenség, 89
- hányadoskritérium, 46
 - sorozatokra, 36
- halmaz, 1
 - $\sim$ hatványhalmaza, 2
 - $\sim$ ok Descartes-szorzata, 3
 - $\sim$ ok különbsége, 3
 - $\sim$ ok metszete, 2
 - $\sim$ ok uniója, 2
 - alulról korlátos $\sim$, 7, 10
 - befedése, 25
 - belső pontja, 22
 - belseje, 22
 - Cantor- $\sim$, 105
 - ekvipontens $\sim$ ok, 12
 - elemének lenni, 1
 - felülről korlátos $\sim$, 7, 10
 - határ pontja, 22
 - határa, 22
 - infimuma, 7, 10
 - izolált pontja, 22
 - kompakt $\sim$, 25
 - kontinuum számosságú $\sim$, 13
 - korlátos $\sim$, 7, 21
 - Lebesgue nulla mértékű $\sim$, 103
 - lezártja, 22
 - megszámlálható $\sim$, 13
 - megszámlálhatóan végtelen $\sim$, 13
 - nulla mértékű $\sim$, 103
 - nyílt $\sim$, 21
 - részbefedése, 25
 - rendezett $\sim$, 7

- sűrű $\sim$, 24
- szuprémuma, 7, 10
- torlódási pontja, 22, 57
- véges $\sim$, 13
- végtelen $\sim$, 13
- zárt $\sim$, 21
- halmazrendszer, 6
 - Descartes-szorzata, 6
 - metszete, 6
 - uniója, 6
- határ pont, 22
- határérték, 58
 - függvény $\sim$ e, 56
 - függvény bal oldali $\sim$ e, 61
 - függvény jobb oldali $\sim$ e, 61
 - sor $\sim$ e, 41
 - sorozat $\sim$ e, 27
 - végtelen $\sim$, 27
- határozatlan integrál, 97
 - elemi $\sim$, 97
- határozott integrál, 108
- hatványhalmaz, 2
- hatványozás, 53
- hatványsor, 51
 - konvergenciasugara, 51
- Heine-tétel, 68
- helyettesítéses integrál, 98
- identitásreláció, 4
- indexhalmaz, 6
- indexsorozat, 27
- induktívan rendezett halmaz, 8
- infimum, 7, 10
- injekció, 4
- inklúzió függvény, 7
- integrál, 108
 - divergens improprius $\sim$, 118
 - elemi határozatlan $\sim$, 97
 - függvény alsó $\sim$ ja, 108
 - függvény felső $\sim$ ja, 108
 - határozatlan $\sim$, 97
 - helyettesítéses $\sim$, 98
 - improprius $\sim$, 118
 - konvergens improprius $\sim$, 118
 - parciális $\sim$ ás, 98
- intervallum, 8, 11
 - felosztása, 106
 - hossza, 103
- inverz
 - elemi függvények $\sim$ e, 85
 - függvény $\sim$ e, 5
- izolált pont, 22
- jólrendezett halmaz, 8
- Jensen-egyenlőtlenség, 55
- jobb oldali határérték, 61
- környezet, 22
- középértéktétel
 - deriválásra vonatkozó $\sim$, 83
- közelítő összeg
 - felosztás alsó $\sim$ e, 106
 - felosztás felső $\sim$ e, 106
- kompakt
 - halmaz, 25
- kondenzációs kritérium, 44
- konkáv függvény, 55
- kontinuum számosságú halmaz, 13
- konvergenciasugár, 51
- konvergens
 - abszolút $\sim$ sor, 43
 - improprius integrál, 118
 - sor, 41
 - sorozat, 27
- konvex
 - függvény, 55
- konvolúció, 48
- korlátos
 - halmaz, 21
 - sorozat, 27
- korlátos részletösszegű sorozat, 50
- korlátos változású sorozat, 50
- koszinusz, 51, 74, 85
- koszinusz hiperbolikus, 51, 77, 85
- kotangens, 51
- kotangens hiperbolikus, 51
- Kuratowski–Zorn-lemma, 8
- L'Hospital szabály, 86
- láncszabály, 81
- Lagrange-féle maradéktag, 91
- Lagrange-tétel, 83
- Lebesgue
 - $\sim$ -tétel, 115
 - nulla mértékű halmaz, 103
- legkisebb elem, 7, 10
- legnagyobb elem, 7, 10
- Leibniz-sor, 47
- lezártja egy halmaznak, 22
- lim, 27, 58
- limesz, 27, 58
 - inferior, 33
 - szuperior, 33
- lim inf, 33
- lim sup, 33
- lineárisan rendezett halmaz, 7
- lokális
 - maximum, 92
 - minimum, 92
 - szélsőérték, 92
- Ludolf-féle szám, 70
- másodfajú szakadás, 66

- művelet, 5
 - asszociatív $\sim$, 5
 - disztributív $\sim$, 5
 - egységelemes $\sim$, 5
 - kommutatív $\sim$, 5
- majdnem mindenütt, 106
- majoráns kritérium, 42
- maximális elem, 7
- megszüntethető szakadás, 66
- megszámlálható
 - $\sim$ an végtelen halmaz, 13
 - halmaz, 13
- Mertens-tétel, 49
- minimális elem, 7
- Minkowski-egyenlőtlenség, 90
- minoráns kritérium, 42
- monoton
 - függvény, 55
 - fogyó függvény, 55
 - fogyó sorozat, 27
 - növő függvény, 55
 - növő sorozat, 27
 - szigorúan $\sim$ függvény, 55
 - szigorúan $\sim$ fogyó függvény, 55
 - szigorúan $\sim$ növény, 55
- Newton–Leibniz-tétel, 113
- nulla mértékű halmaz, 103
- nyílt
 - halmaz, 21
- nyeregpon, 118
- oszcillációs összeg, 109
- páratlan függvény, 55
- páros függvény, 55
- parciális
 - integrál, 98
 - törtekre bontás, 102
- periódus, 55
- periodikus függvény, 55
- Pi, 70
- polinom, 19
- pont körüli r sugarú nyílt gömb, 21
- primitív függvény, 97
- projekció függvény, 7
- részbefedés, 25
- részsorozat, 27
- reláció, 4
 - $\sim$ k kompozíciója, 4
 - értékkészlete, 4
 - értelmezési tartománya, 4
 - antiszimmetrikus $\sim$, 7
 - ekvivalencia $\sim$, 8
 - függvényyszerű $\sim$, 4
 - homogén $\sim$, 7
 - identitás $\sim$, 4
 - inverze, 4
 - megszorítása, 4
 - reflexív $\sim$, 7
 - rendezés $\sim$, 7
 - szimmetrikus $\sim$, 7
- rendezés, 7
- rendezett
 - arkhimédészi módon $\sim$ test, 11
 - halmaz, 7
 - induktívan $\sim$ halmaz, 8
 - jól $\sim$ halmaz, 8
 - lineárisan $\sim$ halmaz, 7
 - pár, 3
- Riemann
 - $\sim$ -integrál, 108
- Rolle-tétel, 83
- sűrű halmaz, 24
- Schröder–Bernstein-tétel, 12
- sor, 41
 - $\sim$ ok Cauchy-szorzata, 48
 - $\sim$ ok konvolúciója, 48
 - átrendezése, 47
 - abszolút konvergencia $\sim$, 43
 - divergens $\sim$, 41
 - feltételesen konvergencia $\sim$, 47
 - feltétlen konvergencia $\sim$, 47
 - hatvány $\sim$, 51
 - hatvány $\sim$ konvergenciasugara, 51
 - konvergencia $\sim$, 41
 - Leibniz- $\sim$, 47
 - Taylor- $\sim$, 91
- sorozat, 27
 - $\sim$ hoz rendelt sor, 41
 - Cauchy- $\sim$, 34
 - divergens $\sim$, 27
 - határértéke, 27
 - index $\sim$, 27
 - konvergencia $\sim$, 27
 - korlátos $\sim$, 27
 - korlátos részletösszegű $\sim$, 50
 - korlátos változású $\sim$, 50
 - monoton fogyó $\sim$, 27
 - monoton növény $\sim$, 27
 - rész $\sim$, 27
 - zérus $\sim$, 27
- szűrjekció, 4
- számok
 - bővített valós $\sim$, 11
- számosság, 12
 - azonos $\sim$ ú, 12
 - kisebb $\sim$ ú, 12
 - kisebb egyenlő $\sim$ ú, 12
- számtani-mértani egyenlőtlenség, 17, 89

- szakadás, 66
 - függvény elsőfajú $\sim$ a, 66
 - függvény másodfajú $\sim$ a, 66
 - függvény megszüntethető $\sim$ a, 66
- szigorú
 - lokális maximum, 92
 - lokális minimum, 92
 - lokális szélsőérték, 92
- szigorúan monoton
 - függvény, 55
 - fogyó függvény, 55
 - növő függvény, 55
- szinusz, 51, 74, 85
- szinusz hiperbolikus, 51, 77, 85
- szuprémum, 7, 10

- tangens, 51, 74, 85
- tangens hiperbolikus, 51, 77, 85
- Taylor
 - $\sim$ -formula, 90
 - $\sim$ -polinom, 91
 - $\sim$ -sor, 91
- természetes
 - alapú logaritmus, 53
- test
 - arkhimédészi módon rendezett $\sim$, 11
- torlódási pont, 22, 57

- véges halmaz, 13
- véges növekmények formulája, 83
- végtelen, 11
 - $\sim$ -szer differenciálható függvény, 88
- halmaz, 13

- Weierstrass
 - $\sim$ -tétel, 66

- zárt
 - halmaz, 21
- zérushely, 55
- zérussorozat, 27