TÁRGYKÖVETELMÉNYEK

Analízis szigorlat informatikusoknak

Kód: BMETE90AX20
Félév: 2019/20/1 **Nyelv:** magyar

Vizsgáztatók: Bodrogné Réffy Júlia
Szabó Sándor
Szekeres András

Számonkérés: 40 pont 80 perc
feleletválasztós: 20 darab egyenként 2 pontos
kidolgozandó: nincs
valamint nem kötelező szóbeli. A feladatok megoldásához számológép, integrál táblázat használható.
Amennyiben a hallgató a kijavított zárthelyit a megtekintésre szánt időpontban nem tekinti meg, akkor ezt úgy tekintjük, hogy elfogadja a zárthelyi pontszámot, azon később már nem lehet módosítani.

Az osztályzat kialakítása

- az elért pontszám alapján

$0\% \leq p < 40\%$ esetén elégtelen (1),
$40\% \leq p < 55\%$ esetén elégséges (2),
$55\% \leq p < 70\%$ esetén közepes (3),
$70\% \leq p < 85\%$ esetén jó (4),
$85\% \leq p$ esetén jeles (5).

Az elért eredmény bekerül a Neptunba.

Az írásbeli értékelése a fentiek szerint. Az elégtelen (1) és elégséges (2) jegy bekerül a Neptunba. Jobb eredmény esetén lehet választani a jegy elfogadása és a szóbeli között. A szóbelin lehet rontani, legfeljebb elégségesre (2). A szóbelin definíciókat, tételeket kell tudni kimondani.

1. **szigorlat: december 9. (hétfő) 8:15 - 10:00 K250**
2. **szigorlat: december 18. (szerda) 8:15 - 10:00 E306cd**
3. **szigorlat: január 6. (hétfő) 10:00 - 11:30 E1B**
4. **szigorlat: január 13. (hétfő) 10:00 - 11:30 E1B**
5. **szigorlat: január 20. (hétfő) 10:00 - 11:30 E1B**

Tételek

Analízis 1. témaköréből

1. Komplex számok, polinomok

Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja. Euler-egyenlet. Műveletek komplex számokkal. Komplex számok konjugáltja, abszolút értéke. Komplex polinomok. Az algebra alaptétele.

2. Valós számsorozatok

Valós számsorozatok határértéke, konvergencia fogalma, határérték egyértelműsége, Cauchy-tulajdonság, konvergens sorozat Cauchy és fordítva. Végtelenhez tartó sorozatok, speciális rendőr-elv. Nagyságrendek összehasonlítása. Műveletek konvergens sorozatokkal (összeg, szorzat, reciprok, hányados, illetve gyökös kifejezések határértéke).

Végtelenhez, illetve 0-hoz tartó sorozatok reciprokának határértéke, korlátos és nullához tartó sorozatok szorzatának határértéke. Nevezetes sorozatok határértéke (n^k , a^n , $\sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{n}$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, rendőr-elv. Konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Teljes indukció és alkalmazása rekurzív sorozatok konvergenciájának meghatározásához. Sorozat torlódási pontjai, limesz szuperior, limesz inferior.

3. Függvények határértéke, folytonossága, elemi függvények

Függvények pontbeli határértéke, folytonossága. Átviteli elv. Műveletek határértékkel (összeg, szorzat, hányados). Szakadási helyek osztályozása. Nevezetes határértékek (pl. $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$ =1). Elemi függvények (polinomok, hatvány-, trigonometrikus, exponenciális, hiperbolikus függvények és inverzeik.) folytonossága. Összeg-, szorzat-, reciprok-, hányadosfüggvény, összetett függvény, inverz függvény folytonossága. Kompakt halmazon folytonos függvényekre vonatkozó tételek (Bolzano-tétel, Weierstrass I. és II. tétele) és következményeik. Inverz függvény definíciója, létezése, trigonometrikus függvények inverzei, hiperbolikus függvények és inverzeik. Egyenletes folytonosság, Heine-tétele.

4. Valós függvények differenciálszámítása

Differenciálhányados fogalma, differenciálhatóság szükséges és szükséges és elégséges feltétele, kapcsolat az érintő egyenessel. Differenciálási szabályok (összeg, szorzat, reciprok, hányados, kompozíció, inverz deriváltja). Magasabbrendű deriváltak. Elemi függvények (hatványfüggvények, exponenciális, trigonometrikus,

hiperbolikus függvények és inverzeik) deriváltjai.

5. A differenciálszámítás alkalmazásai
Érintő egyenes egyenlete. Lokális szélsőérték fogalma, kapcsolata a deriválttal (szükséges feltétel, elégséges feltétel). Rolle-tétel, Lagrange-tétel. Integrálszámítás I. alaptétele. L'Hospital-szabály. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai (monotonitás, konvexitás, inflexió), kapcsolat a deriváltakkal. Implicit megadású függvények deriválása, paraméteres megadású görbék. Függvényvizsgálat lépései, abszolút szélsőértékek meghatározása.

6. Primitív függvény
Primitív függvény. Elemi függvények primitív függvénye, deriválási szabályok következményei a primitív függvényre. Integrálási módszerek (helyettesítés, parciális integrálás, racionális törtfüggvények integrálása).

7. Határozott integrál és alkalmazásai
Alsó- és felső közelítő összegek, finomodó felosztások, határozott integrál, Riemann-integrálhatóság, oszcillációs összeg. Newton–Leibniz tétel. Az integrálszámítás középértéktétele, Riemann-integrálható függvény abszolút értéke. Integrálfüggvény, az integrálszámítás második alaptétele. Improprius integrál. Görbék ívhossza, forgástestek felszíne, térfogata.

Analízis 2. témaköréből

8. Differenciálegyenletek (d.e.) bevezetése, elsőrendű d.e.-ek
Differenciálegyenlet fogalma, osztályozásuk. Megoldás,

általános megoldás, partikuláris megoldás, kezdetiérték-feladat. Szétválasztható változójú d.e.-ek megoldása. Elsőrendű lineáris d.e.-ek. Az elsőrendű homogén lineáris d.e.-ek megoldásai 1 dimenziós vektorteret alkotnak. Elsőrendű inhomogén lineáris d.e. általános megoldásának alakja (két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek). Az állandó variálásának módszere. Új változó bevezetése (spec.: $u = y/x$ és $u = ax + by$). Iránymező, izoklina. Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a d.e.- hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere. A d.e. megoldásait közelítő Taylor-polinomok számolása.

9. Magasabbrendű lineáris d.e.-ek

Lineáris d.e. fogalma. (Állandó/függvény-együtthatós, homogén/inhomogén.) Az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai n-dimenziós vektorteret alkotnak. Az n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása. Karakterisztikus polinom. Az általános megoldás alakja. Wronski-determináns. A homogén egyenlet megoldásai lineáris függetlenségének eldöntése a Wronski-determináns segítségével. Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek. Az n-edrendű inhomogén lineáris d.e. partikuláris megoldásának keresése speciális jobb oldali input függvény esetén próbafüggvénnyel.

10. Lineáris rekurzió

Lineáris rekurzió fogalma, alakja. A k-adrendű lineáris rekurzióval generált sorozatok k-dimenziós vektorteret alkotnak. Megoldás keresése (karakterisztikus-egyenlet).

Bázis megadása egy adott lineáris rekurziót kielégítő sorozatok terében. A sorozat első *k* eleme egyértelműen meghatározza a sorozatot. A Fibonacci-sorozat és annak explicit alakja.

11. Numerikus sorok

Numerikus sor fogalma. Konvergencia, divergencia, numerikus sor összege. A harmonikus sor divergens. Végtelen mértani sor összege. Sorok összege és konstansszorosa. Cauchy-kritérium, mint a sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele. A konvergencia szükséges feltétele ($a_k \to 0$). Leibniz-kritérium váltakozó előjelű sorokra, hibabecslés. Abszolút konvergencia és kapcsolata a konvergenciával. Konvergencia-kritériumok pozitív tagú sorokra: majoráns- és minoráns kritériumok, hányados- és gyökkritérium, ezek határértékes alakja, integrál kritérium. A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ sor konvergenciájának feltétele.

12. Függvénysorozatok, függvénysorok

Függvénysorozat fogalma, konvergencia-tartománya. Egyenletes konvergencia fogalma. Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, deriválhatóságra és integrálhatóságra. Függvénysor fogalma, konvergencia tartománya. Egyenletes konvergencia. Cauchy kritérium függvénysorokra. Weierstrass-kritérium függvénysorokra az egyenletes és abszolút konvergencia biztosítására. Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, az integrálhatóságra és a deriválhatóságra vonatkozóan.

13. Hatványsorok

Hatványsor fogalma, konvergenciája. Egy adott pontban

konvergens ill. divergens hatványsor tulajdonságai. Konvergencia tartomány fogalma, alakja. Konvergencia sugár. Konvergencia sugár meghatározása hányados- és gyökkritériummal. Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája. Hatványsor összegfüggvényének folytonossága. Hatványsor összegfüggvényének integrálja. Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia sugara. Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora. Egy függvényt az x_0 pontban n-ed rendben érintő, legfeljebb n-ed fokú polinom egyértelműsége (Taylor-polinom). Taylor-sor fogalma. Lagrange-féle maradéktag alakja. Elégséges feltétel arra, hogy egy függvény Taylor-sora megegyezzen a függvénnyel. A hatványsor alak egyértelműsége. A geometriai sorból levezethető Taylor-sorok. Az $ln(1 + x)$, $arctan\ x$ függvények megegyeznek a Taylor soraikkal a (−1, 1)-en. Az e^x , $sin\ x$, $cos\ x$, $sh\ x$ és a $ch\ x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával (−∞,∞)-en. Binomiális sor, összegfüggvénye és konvergenciasugara. Az $f(x) = arcsin\ x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával a (−1, 1)-on. Alkalmazások: függvényérték közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

14. Többváltozós függvények határértéke és deriválása

Többváltozós függvények értelmezése, grafikon, szemléltetésük. Távolság, környezet fogalma; belső-, külső-, határpont, torlódási pont, zárt és nyílt halmazok, kompakt halmaz, korlátos halmaz. Pontsorozat és konvergenciája. Többváltozós függvények határértéke és folytonossága. Ezek átviteli-elves megfogalmazása. Műveletek és a folytonosság kapcsolata, összetett függvény folytonossága. Parciális derivált fogalma. A totális derivált, gradiens vektor. A totális derivált létezésének szükséges feltételei. Egy elégséges

feltétel.

15. A deriválás alkalmazásai

Totálisan deriválható függvény érintősíkja, teljes differenciálja, iránymenti derivált és kiszámítása. Gradiens vektor tulajdonságai. Melyik irányban legnagyobb ill. legkisebb az iránymenti derivált és mekkora? Magasabb rendű parciális deriváltak. Young-tétel. Lokális szélsőérték definíciója, szükséges feltétele parciálisan deriválható függvény esetén. A lokális szélsőérték elégséges feltétele kétváltozós függvényekre, Hesse-mátrix. Abszolút szélsőérték fogalma, meghatározása, Weierstrass-tétel. Összetett függvény deriválása.

16. Többváltozós függvények integrálása

Integrálás téglalapon. Az integrál értelmezése. Kiszámítása a Fubini-tétellel. Elégséges feltétel az integrál létezésére. Fubini-tétel speciális esete $f(x, y) = g(x)h(y)$ alakú függvényekre. Az integrál értelmezése tetszőleges korlátos halmazon. Normál tartományok és az integrál kiszámítása normál tartományon. Kettős integrál transzformációja. Síkbeli polár koordinátarendszer, és Jacobi-determinánsa. Hármas integrál kiszámítása téglatesten, normál tartományon és helyettesítéssel (gömbi ill. hengerkoordináták, és Jacobi determinánsuk).

17. Fourier-sor és Fourier-transzformáció

A trigonometrikus rendszer ortogonalitása, lineáris függetlensége, teljessége. Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat az összegfüggvény és az együtthatók között.) A Fourier-együtthatók kiszámítása. Összeg, konstansszoros Fourier-sora. Páros és páratlan függvény Fourier sora.

Elégséges feltétel Fourier-sor egyenletes konvergenciájára.
Dirichlet-tétel (Fourier-sor pontonkénti konvergenciája.)
Függvények Fourier-transzformáltja.

Budapest, 2019. szeptember 2.

Dr. Szabó Sándor
egyetemi adjunktus