Numerikus módszerek tételsor, 2017/18. I. félév

1. Alapfogalmak. *(Normált tér fogalma, Banach-féle fixponttétel (biz. nem kell), különböző vektor- és mátrixnormák bevezetése, indukált mátrixnorma fogalma, tulajdonságai. Az 1-es, 2-es és maximumnormák kiszámítása. A norma és a spektrálsugár kapcsolata, $\mathbf{A}^k$ ill. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ konvergenciavizsgálata. Becslés $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ inverzének normájára. Gersgorin első és második tétele.)*

2. M-mátrixok. *(M-mátrix fogalma, szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy egy mátrix M-mátrix legyen. M-mátrixokkal végigcsinálható a Gauss-módszer. Becslés egy M-mátrix inverzének maximumnormájára. A reguláris felbontás kapcsolata az M-mátrix tulajdonsággal. Iterációs módszerek konvergenciája, ha az együtthatómátrix M-mátrix.)*

3. Numerikus eljárások hibaforrásai, kondicionáltság. *(Korrekt kitűzésű feladat fogalma. Kondíciószám fogalma, jelentése, kiszámítása. Lebegőpontos számábrázolás tulajdonságai, kerekítési hibája, nevezetes számai, gépi pontosság. Kerülendő lebegőpontos műveletek. Mátrixok kondíciószáma, a kondíciószám tulajdonságai. Lineáris egyenletrendszerek kondicionáltsága.)*

4. Gauss-módszer. *(A Gauss-módszer ismertetése, egy eliminációs lépés mátrixos felírása (Gauss-transzformáció), a végrehajthatóság szükséges és elégséges feltétele, elégséges feltételek (a szigorúan domináns főátlójú eset bizonyítása nem kell). A Gauss-módszer műveletigénye.)*

5. LU-felbontás és változatai, főelemkiválasztás. *(LU-felbontás létezése, főelemkiválasztás szükségessége. LU-felbontás általános mátrixokra (biz. nem kell), növekedési faktor, $\mathbf{LDM}^T$, $\mathbf{LDL}^T$ és Cholesky-felbontások.)*

6. Lineáris egyenletrendszerek megoldása iterációval. *(Lineáris vektoriterációk konvergenciája, a konvergencia sebessége, iterációk előállítása, Jacobi- és Gauss-Seidel-iterációk (összehasonlítás konvergencia szempontjából) ill. ezek relaxált változatai (JOR, SOR). Reguláris felbontás konvergenciája, a JOR és SOR módszerek konvergenciája különböző mátrixtípusok esetén. Leállási feltételek.)*

7. Gradiens módszerek. *(Lineáris egyenletrendszerek megoldásának átfogalmazása egy n-változós függvény minimumhelyének megkeresésére. Az iránymenti minimumok meghatározása. Gradiens módszer ismertetése. Konjugált gradiens módszer alapötletének kétváltozós esetbeli bemutatása, A-konjugált irányok. Többváltozós esetre vonatkozó tételek ismertetése (biz. nélkül).)*

8. QR-felbontás. *(A Householder-tükrözés és tulajdonságai, a QR-felbontás létezése teljes oszloprangú mátrixok esetén, Givens-forgatás, QR-felbontás Givens-forgatásokkal, mátrixok Hessenberg-alakra transzformálása Householder-tükrözésekkel.)*

9. Túlhatározott rendszerek megoldása. Legkisebb négyzetek értelemben legjobb közelítés. *(Túlhatározott rendszerek fogalma, megoldása legkisebb négyzetek értelemben, megoldás megvalósítása a normálegyenlet megoldásával ill. a QR-felbontás segítségével. A legkisebb négyzetek értelemben legjobb közelítés alapfeladata. A feladat megoldása a normálegyenlet segítségével.)*

10. A sajátértékfeladatok numerikus megoldása. *(Sajátértékfeladatok kondicionáltsága, hatványmódszer, inverz iteráció, Rayleigh-hányados, Rayleigh-hányados iteráció. Jacobi-módszer: a négyzetösszegváltozás a transzformáció során, gyakorlati megvalósítás. QR-iteráció: az algoritmus ismertetése, a módszer konvergenciája, gyorsítás Hessenberg-alakra transzformációval.)*

---

11. Nemlineáris egyenletek megoldása. *(Gyökök elkülönítése folytonos és deriválható függvények esetén; konvergens sorozatok konvergenciasebessége és ennek kapcsolata a helyes jegyek számával; az intervallumfelezési-, szelő- és húrmódszerek algoritmusa, tulajdonságaik, konvergencia elégséges feltétele, konvergenciarendjük. Newton-módszer monoton konvergencia tétele, konvergenciarend igazolása; fixpontiterációk, kapcsolatuk az egyenletek megoldásaival, konvergenciarend; hibabecslés a Banach-féle fixponttétel segítségével.)*

12. Polinominterpoláció I.: Lagrange-módszer, hibabecslés, Csebisev-alappontok. *(Az interpoláció alapfeladata, az interpolációs polinom előállítása Lagrange-módszerrel, interpolációs hiba kiszámítása, elégséges feltétel arra, hogy n növelésével nullához tartson a hiba, Runge-példája, felső becslés a $w_{n+1}(x)$ alappontpolinom abszolút értékére; Csebisev-polinomok definíciója, explicit előállítása, normált Csebisev-polinomok extremális tulajdonsága, Csebisev-alappontok alkalmazása az interpolációs feladatban. Hibabecslés ebben az esetben.)*

13. Polinominterpoláció II.: Interpolációs polinom Newton-alakja, Hermite-interpoláció, spline-interpoláció. *(Newton-módszer alapötlete, Newton-féle osztott differenciák és tulajdonságaik, interpolációs polinom előállítása; Hermite-interpolációs polinom egyértelmű létezése, Hermite–Fejér-interpoláció megvalósítása. Szakaszonként polinomiális interpoláció alapfeladata, szakaszonként legfeljebb harmadfokú spline-függvények tulajdonságai, meghatározásuk gyakorlati módszere.)*

14. Trigonometrikus interpoláció. *(Trigonometrikus interpolációs polinom alakja, létezésének egyértelműsége, a valós Fourier-együtthatók kiszámítása; a komplex Fourier-analízis és szintézis képletei, gyors Fourier-transzformáció végrehajtása abban az esetben, ha az alappontok száma kettőhatvány, hatékonyság bemutatása műveletszám-vizsgálattal.)*

15. Numerikus deriválás. Numerikus integrálás I. *(Alapfeladat, az első derivált haladó, retrográd és központi közelítése, a másodrendű derivált központi közelítése, lépéstávolság dilemma, Richardson-extrapoláció. Kvadratúra fogalma, Newton–Cotes-formulák, a Newton–Cotes-együtthatók tulajdonságai, konvergencia és pontossági rend, rendnövekedés páratlan alappont esetén.)*

16. Numerikus integrálás II. *(Az összetett trapéz-, érintő- és Simpson-formula hibája (csak a trapézt kell bizonyítani), Gauss-kvadratúra alapötlete a pontossági rend növelésére, a pontossági rendet biztosító tétel, a kvadratúra megvalósítása és pontossága.)*

17. Kezdetiérték-feladatok megoldása I.: EE, IE és CN módszerek, konzisztencia, stabilitás, konvergencia. Abszolút stabilitás. *(Euler-módszerek, Crank–Nicolson-módszer és származtatásuk, lokális- és képlethiba, konzisztencia és annak rendje, stabilitás, konvergencia és annak rendje. Az EE-módszer konvergenciája (bizonyítással). Abszolút stabilitás, A-stabilitás, ezen tulajdonság vizsgálata az EE és IE módszerekre. Stiff egyenletek megoldása során felmerülő problémák, kiküszöbölésük.)*

18. Kezdetiérték-feladatok megoldása II.: Runge–Kutta-módszerek, lineáris többlépéses módszerek. *(Az alapötlet szemléltetése a másodrendű Runge–Kutta-módszer segítségével, Butcher-tábla, algoritmusok felírása a Butcher-tábla alapján, különösen a negyedrendű Runge-Kutta módszer esetén. Lineáris többlépéses módszerek konzisztenciájának és stabilitásának feltétele. Konvergencia. Dahlquist-korlátok. Adams- és BDF-formulák konstrukciója.)*

19. Peremértékfeladatok megoldása. *(Peremértékfeladatok bevezetése, belövéses módszer, belövéses módszer végrehajtása intervallumfelezéssel. Peremértékfeladatok megoldása a véges differenciák módszerével, konvergenciavizsgálattal.)*