Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, A., Megoldások (2017/18. I.)

1. Feladat. (2+2+2p) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot! Mutassuk meg, hogy a hatványmódszer alkalmazható az $\mathbf{A}$ mátrixra! Lépjünk egy lépést a módszerrel az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [100, 4, 7]^T$ vektorról indulva, majd adjunk becslést a legnagyobb abszolút értékű sajátértékre, és a hozzá tartozó sajátvektorra!

Megoldás: A mátrix szimmetrikus. A Gersgorin-tétel szerint a három valós sajátérték rendre az alábbi intervallumokban helyezkedik el: [-13,-7], [2,8], [18,22]. Így a legnagyobb abszolút értékű sajátérték valóban egyszeresen domináns.

Egy lépéshez elegendő az $\overline{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_0 = [2011, 74, 143]^T$ szorzást elvégezni, ami már eleve egy közelítése a domináns sajátértékhez tartozó sajátvektornak. A domináns sajátérték közelítése Rayleigh-hányadossal adható meg: $(\overline{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_1)/(\overline{\mathbf{x}}_1^T\overline{\mathbf{x}}_1) = 20.1091$.

2. Feladat. (2+4+1p) Az $f(x) = x - e^{-x}$ függvény $[0, 2]$ intervallumba eső zérushelyét szeretnénk meghatározni. Mutassuk meg, hogy pontosan egy zérushely van ebben az intervallumban! Ezután lépjünk annyit az intervallumfelezési módszerrel, míg a kapott iterációs lépésről indítva a Newton-módszer már a zérushelyhez monoton módon konvergáló sorozatot állít elő! Lépjünk a Newton-módszerrel is egyet, és adjunk becslést arra, hogy a kapott érték maximum milyen messze van a zérushelytől!

Megoldás: $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$, azaz a függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en. $f(0) < 0$ és $f(2) > 0$, így a [0,2] intervallumban valóban pontosan egy zérushely van. $f''(x) = -e^{-x} < 0$, így olyan helyről kell indítani a Newton-módszert, ahol a függvényérték negatív (ezek a pontok a monotonitás miatt a zérushelytől balra helyezkednek el). Innét már monoton lesz a konvergencia, mert a deriváltak nem váltanak előjelet. Ezek szerint tehát addig kell lépni az intervallumfelezési módszerrel, míg az iterációs lépés negatív függvényértékű helyet ad, majd abból a pontból kell egy lépést elvégezni a Newton-módszerrel.

Az intervallumfelezési módszerrel: Kezdő intervallum [0,2], $x_0 = 1$, $f(x_0) > 0$. Az új intervallum [0,1], $x_1 = 1/2$, $f(x_1) < 0$, azaz innét már indítható a Newton-módszer. Ezzel lépünk egyet: $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.5663$.

Az $|x_2 - x^\star|$ távolságot a

$$|x_2 - x^\star| \leq \frac{f(x_2)}{\min_{x\in[x_2,x^\star]} |f'(x)|} \leq \frac{f(x_2)}{1 + 1/e} = 9.5366 \times 10^{-4}$$

módon becsülhetjük.

3. Feladat. (2+2+3p) Határozzuk meg azt a legkisebb fokszámú $p(x)$ polinomot ill. $t(x)$ 2π-periodikus trigonometrikus polinomot, melyek grafikonja összeköti a $(0,1)$, $(2\pi/3,0)$, $(4\pi/3,0)$ és $(2\pi,1)$ pontokat! Adjunk felső becslést a $\max_{x\in[0,2\pi]}|p(x)-t(x)|$ értékre!

Megoldás: 4 pontra egy legfeljebb harmadfokú polinom illeszthető egyértelműen. Ez megadható Lagrange vagy Newton módszerével. A Lagrange az egyszerűbb most.

$$p(x) = 1\cdot\frac{(x-2\pi/3)(x-4\pi/3)(x-2\pi)}{(0-2\pi/3)(0-4\pi/3)(0-2\pi)} + 1\cdot\frac{(x-0)(x-2\pi/3)(x-4\pi/3)}{(2\pi-0)(2\pi-2\pi/3)(2\pi-4\pi/3)}$$

(A többi Lagrange-féle alappolinom nullával szorzódik, emiatt nem lettek kiírva.)

A trigonometrikus polinom illesztésénél csak az első három pontot kell figyelembe venni. A 2π-periodikusság miatt a polinom át fog menni a negyedik ponton is. Egy elsőfokú trigonometrikus polinom fog interpolálni. Az együtthatók a tanult módszerrel számolhatók: $t(x) = 1/3 + 2\cos(x)/3$.

A két függvény maximális eltérése úgy számolható, hogy észrevesszük, hogy $p(x)$ tulajdonképpen a $t(x)$ függvényt interpolálja a megadott 4 pontban. Így az interpolációs hibára kell becslést adni $n = 3$ (4 pont van, melyek $h = 2\pi/3$ távolságra vannak egymástól) és $f(x) = t(x)$ választással. A tanult képlet alapján:

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|p(x)-t(x)| \le \frac{M_4 h^4}{16} = \frac{(2/3)(2\pi/3)^4}{16} = 0.8017.$$

Itt $M_4 = 2/3$ a $t(x)$ polinom negyedik deriváltja abszolút értékének egy becslése.

4. Feladat. (6p) A $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$ pontokhoz tartozó szakaszonként harmadfokú természetes spline-interpolációs függvény meghatározásakor az alappontokbeli deriváltakra az alábbi értékek adódtak: $d_0 = 3/4$, $d_1 = 3/2$, $d_2 = 9/4$! Adjuk meg az interpolációs függvény $[1,2]$ intervallumon érvényes képletét!

Megoldás: Az interpoláció függvény adott intervallumra vonatkozó képelte Hermite–Fejér-interpolációval határozható meg:

$$s(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^2(x-2).$$

5. Feladat. (3+4p) Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1} e^x/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ integrál közelítését kétféle módon: összetett érintőformulával 4 osztóintervallumot használva, ill. a kétpontos Gauss–Csebisev-formulával (a kvadratúrasúlyok: $\pi/2, \pi/2$)! (Tájékoztatásul: a pontos integrál 3.9775.)

Megoldás: Legyen $f(x) = e^x$ és $g(x) = e^x/\sqrt{1-x^2}$. Az integrál ekkor az összetett érintőformulával az alábbi módon közelíthető:

$$I \approx 1/2 \cdot (g(-3/4) + g(-1/4) + g(1/4) + g(3/4)) = 3.0226.$$

A Gauss–Csebisev-féle közelítéshez szükségünk van a másodfokú Csebisev-polinom két zérushelyére. Ezek: $c_0 = -1/\sqrt{2}$ és $c_1 = 1/\sqrt{2}$. Így a közelítés:

$$I \approx (\pi/2) \cdot (f(c_0) + f(c_1)) = 3.9603.$$

Fontos, hogy az első közelítésben a g függvény értékei a másodikban pedig az f függvény értékei szerepelnek.

6. Feladat. (5+1+1p) Az $y' = (1+x^2)y$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot oldjuk meg az implicit Euler-módszerrel a $[0, 0.2]$ intervallumon. Határozzuk meg a megoldás közelítő értékét a $h = 0.1$ lépéstávolságot használva az $x = 0.2$ pontban, és adjuk meg a közelítés hibáját, ha tudjuk, hogy a pontos megoldás $y(x) = \exp(x + x^3/3)$! Kb. mekkora hibára számíthatnánk, ha a $h = 0.05$ lépéstávolságot használnánk?

Megoldás: Az implicit Euler-módszer képlete $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$. Az adott differenciálegyenletre alkalmazva $y_{k+1} = y_k + h(1 + x_{k+1}^2)y_{k+1}$, ahonnét

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - h(1 + x_{k+1}^2)}.$$

A kezdeti érték miatt $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, és a $h = 0.1$ lépéstávolsággal számolva a fenti képletből kapjuk, hogy $y_1 = y_0/(1-0.1(1+0.1^2)) = 1.1123$, majd hasonlóan $y_2 = 1.2415$. Az intervallum végpontjában a hiba 0.0168. Feleekkora lépéstávolsággal kb. feleekkora hibát várunk, azaz 0.0084-et (a tényleges 0.0079, de ezt nem kellett kiszámolni).

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, B., Megoldás (2017/18. I.)

1. Feladat. (2+2+2p) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot! Mutassuk meg, hogy a hatványmódszer alkalmazható az $\mathbf{A}$ mátrixra! Lépjünk egy lépést a módszerrel az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [100, 7, 13]^T$ vektorról indulva, majd adjunk becslést a legnagyobb abszolút értékű sajátértékre, és a hozzá tartozó sajátvektorra!

Megoldás: A mátrix szimmetrikus. A Gersgorin-tétel szerint a három valós sajátérték rendre az alábbi intervallumokban helyezkedik el: [-13,-7], [2,8], [16,24]. Így a legnagyobb abszolút értékű sajátérték valóban egyszeresen domináns.

Egy lépéshez elegendő az $\overline{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_0 = [2040, 143, 272]^T$ szorzást elvégezni, ami már eleve egy közelítése a domináns sajátértékhez tartozó sajátvektornak. A domináns sajátérték közelítése Rayleigh-hányadossal adható meg: $(\overline{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_1)/(\overline{\mathbf{x}}_1^T\overline{\mathbf{x}}_1) = 20.4091$.

2. Feladat. (2+4+1p) Az $f(x) = e^x + x$ függvény $[-2, 0]$ intervallumba eső zérushelyét szeretnénk meghatározni. Mutassuk meg, hogy pontosan egy zérushely van ebben az intervallumban! Ezután lépjünk annyit az intervallumfelezési módszerrel, míg a kapott iterációs lépésről indítva a Newton-módszer már a zérushelyhez monoton módon konvergáló sorozatot állít elő! Lépjünk a Newton-módszerrel is egyet, és adjunk becslést arra, hogy a kapott érték maximum milyen messze van a zérushelytől!

Megoldás: $f'(x) = e^x + 1 > 0$, azaz a függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en. $f(-2) < 0$ és $f(0) > 0$, így a [-2,0] intervallumban valóban pontosan egy zérushely van. $f''(x) = e^x > 0$, így olyan helyről kell indítani a Newton-módszert, ahol a függvényérték pozitív (ezek a pontok a monotonitás miatt a zérushelytől jobbra helyezkednek el). Innét már monoton lesz a konvergencia, mert a deriváltak nem váltanak előjelet. Ezek szerint tehát addig kell lépni az intervallumfelezési módszerrel, míg az iterációs lépés pozitív függvényértékű helyet ad, majd abból a pontból kell egy lépést elvégezni a Newton-módszerrel.

Az intervallumfelezési módszerrel: Kezdő intervallum [-2,0], $x_0 = -1$, $f(x_0) < 0$. Az új intervallum [-1,0], $x_1 = -1/2$, $f(x_1) > 0$, azaz innét már indítható a Newton-módszer. Ezzel lépünk egyet: $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = -0.5663$.

Az $|x_2 - x^\star|$ távolságot a

$$|x_2 - x^\star| \leq \frac{f(x_2)}{\min_{x\in[x^\star, x_2]} |f'(x)|} \leq \frac{f(x_2)}{1 + 1/e} = 9.5366 \times 10^{-4}$$

módon becsülhetjük.

3. Feladat. (2+2+3p) Határozzuk meg azt a legkisebb fokszámú $p(x)$ polinomot ill. $t(x)$ 2π-periodikus trigonometrikus polinomot, melyek grafikonja összeköti a $(0,0)$, $(2\pi/3,1)$, $(4\pi/3,1)$ és $(2\pi,0)$ pontokat! Adjunk felső becslést a $\max_{x\in[0,2\pi]}|p(x)-t(x)|$ értékre!

Megoldás: 4 pontra egy legfeljebb harmadfokú polinom illeszthető egyértelműen. Ez megadható Lagrange vagy Newton módszerével. A Lagrange az egyszerűbb most.

$$p(x) = 1\cdot\frac{(x-0)(x-4\pi/3)(x-2\pi)}{(2\pi/3-0)(2\pi/3-4\pi/3)(2\pi/3-2\pi)}+$$
$$1\cdot\frac{(x-0)(x-2\pi/3)(x-2\pi)}{(4\pi/3-0)(4\pi/3-2\pi/3)(4\pi/3-2\pi)}$$

(A többi Lagrange-féle alappolinom nullával szorzódik, emiatt nem lettek kiírva.)

A trigonometrikus polinom illesztésénél csak az első három pontot kell figyelembe venni. A 2π-periodikusság miatt a polinom át fog menni a negyedik ponton is. Egy elsőfokú trigonometrikus polinom fog interpolálni. Az együtthatók a tanult módszerrel számolhatók: $t(x)=2/3-2\cos(x)/3$.

A két függvény maximális eltérése úgy számolható, hogy észrevesszük, hogy $p(x)$ tulajdonképpen a $t(x)$ függvényt interpolálja a megadott 4 pontban. Így az interpolációs hibára kell becslést adni $n=3$ (4 pont van, melyek $h=2\pi/3$ távolságra vannak egymástól) és $f(x)=t(x)$ választással. A tanult képlet alapján:

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|p(x)-t(x)|\le\frac{M_4h^4}{16}=\frac{(2/3)(2\pi/3)^4}{16}=0.8017.$$

Itt $M_4=2/3$ a $t(x)$ polinom negyedik deriváltja abszolút értékének egy becslése.

4. Feladat. (6p) A $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$ pontokhoz tartozó szakaszonként harmadfokú természetes spline-interpolációs függvény meghatározásakor az alappontokbeli deriváltakra az alábbi értékek adódtak: $d_0=3/4$, $d_1=3/2$, $d_2=9/4$! Adjuk meg az interpolációs függvény $[0,1]$ intervallumon érvényes képletét!

Megoldás: Az interpoláció függvény adott intervallumra vonatkozó képelte Hermite–Fejér-interpolációval határozható meg:

$$s(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2(x-1).$$

5. Feladat. (3+4p) Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1}\sin(x+1)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ integrál közelítését kétféle módon: összetett érintőformulával 3 osztóintervallumot

használva, ill. a hárompontos Gauss–Csebisev-formulával (a kvadratúra-súlyok: $\pi/3, \pi/3, \pi/3$)! (Tájékoztatásul: a pontos integrál 2.0228.)

Megoldás: Legyen $f(x) = \sin(x+1)$ és $g(x) = \sin(x+1)/\sqrt{1-x^2}$. Az integrál ekkor az összetett érintőformulával az alábbi módon közelíthető:

$$I \approx 2/3 \cdot (g(-2/3) + g(0) + g(2/3)) = 1.7440.$$

A Gauss–Csebisev-féle közelítéshez szükségünk van a harmadfokú Csebisev-polinom három zérushelyére. Ezek: $c_0 = -\sqrt{3}/2$, $c_1 = 0$ és $c_2 = -\sqrt{3}/2$. Így a közelítés:

$$I \approx (\pi/3) \cdot (f(c_0) + f(c_1) + f(c_2)) = 2.0230.$$

Fontos, hogy az első közelítésben a g függvény értékei a másodikban pedig az f függvény értékei szerepelnek.

6. Feladat. (5+1+1p) Az $y' = (1+x)y$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot oldjuk meg az implicit Euler-módszerrel a $[0, 0.4]$ intervallumon. Határozzuk meg a megoldás közelítő értékét a $h = 0.2$ lépéstávolságot használva az $x = 0.4$ pontban, és adjuk meg a közelítés hibáját, ha tudjuk, hogy a pontos megoldás $y(x) = \exp(x + x^2/2)$! Kb. mekkora hibára számíthatnánk, ha a $h = 0.05$ lépéstávolságot használnánk?

Megoldás: Az implicit Euler-módszer képlete $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$. Az adott differenciálegyenletre alkalmazva $y_{k+1} = y_k + h(1 + x_{k+1})y_{k+1}$, ahonnét

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - h(1 + x_{k+1})}.$$

A kezdeti érték miatt $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, és a $h = 0.2$ lépéstávolsággal számolva a fenti képletből kapjuk, hogy $y_1 = y_0/(1 - 0.2(1 + 0.2)) = 1.3158$, majd hasonlóan $y_2 = 1.8275$. Az intervallum végpontjában a hiba 0.2114. Negyed ekkora lépéstávolsággal kb. negyed ekkora hibát várunk, azaz 0.0529-et (a tényleges 0.0422, de ezt nem kellett kiszámolni).