Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, A. (2017/18. I.)

1. Feladat. (2+2+2p) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot! Mutassuk meg, hogy a hatványmódszer alkalmazható az $\mathbf{A}$ mátrixra! Lépjünk egy lépést a módszerrel az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [100, 4, 7]^T$ vektorról indulva, majd adjunk becslést a legnagyobb abszolút értékű sajátértékre, és a hozzá tartozó sajátvektorra!

2. Feladat. (2+4+1p) Az $f(x) = x - e^{-x}$ függvény $[0, 2]$ intervallumba eső zérushelyét szeretnénk meghatározni. Mutassuk meg, hogy pontosan egy zérushely van ebben az intervallumban! Ezután lépjünk annyit az intervallumfelezési módszerrel, míg a kapott iterációs lépésről indítva a Newton-módszer már a zérushelyhez monoton módon konvergáló sorozatot állít elő! Lépjünk a Newton-módszerrel is egyet, és adjunk becslést arra, hogy a kapott érték maximum milyen messze van a zérushelytől!

3. Feladat. (2+2+3p) Határozzuk meg azt a legkisebb fokszámú $p(x)$ polinomot ill. $t(x)$ 2π-periodikus trigonometrikus polinomot, melyek grafikonja összeköti a $(0, 1)$, $(2\pi/3, 0)$, $(4\pi/3, 0)$ és $(2\pi, 1)$ pontokat! Adjunk felső becslést a $\max_{x\in[0,2\pi]} |p(x) - t(x)|$ értékre!

4. Feladat. (6p) A $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$ pontokhoz tartozó szakaszonként harmadfokú természetes spline-interpolációs függvény meghatározásakor az alappontokbeli deriváltakra az alábbi értékek adódtak: $d_0 = 3/4$, $d_1 = 3/2$, $d_2 = 9/4$! Adjuk meg az interpolációs függvény $[1, 2]$ intervallumon érvényes képletét!

5. Feladat. (3+4p) Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1} e^x/\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ integrál közelítését kétféle módon: összetett érintőformulával 4 osztóintervallumot használva, ill. a kétpontos Gauss–Csebisev-formulával (a kvadratúrasúlyok: $\pi/2, \pi/2$)! (Tájékoztatásul: a pontos integrál 3.9775.)

6. Feladat. (5+1+1p) Az $y' = (1 + x^2)y$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot oldjuk meg az implicit Euler-módszerrel a $[0, 0.2]$ intervallumon. Határozzuk meg a megoldás közelítő értékét a $h = 0.1$ lépéstávolságot használva az $x = 0.2$ pontban, és adjuk meg a közelítés hibáját, ha tudjuk, hogy a pontos megoldás $y(x) = \exp(x + x^3/3)$! Kb. mekkora hibára számíthatnánk, ha a $h = 0.05$ lépéstávolságot használnánk?

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, B. (2017/18. I.)

1. Feladat. (2+2+2p) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot! Mutassuk meg, hogy a hatványmódszer alkalmazható az $\mathbf{A}$ mátrixra! Lépjünk egy lépést a módszerrel az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [100, 7, 13]^T$ vektorról indulva, majd adjunk becslést a legnagyobb abszolút értékű sajátértékre, és a hozzá tartozó sajátvektorra!

2. Feladat. (2+4+1p) Az $f(x) = e^x + x$ függvény $[-2, 0]$ intervallumba eső zérushelyét szeretnénk meghatározni. Mutassuk meg, hogy pontosan egy zérushely van ebben az intervallumban! Ezután lépjünk annyit az intervallumfelezési módszerrel, míg a kapott iterációs lépésről indítva a Newton-módszer már a zérushelyhez monoton módon konvergáló sorozatot állít elő! Lépjünk a Newton-módszerrel is egyet, és adjunk becslést arra, hogy a kapott érték maximum milyen messze van a zérushelytől!

3. Feladat. (2+2+3p) Határozzuk meg azt a legkisebb fokszámú $p(x)$ polinomot ill. $t(x)$ 2π-periodikus trigonometrikus polinomot, melyek grafikonja összeköti a $(0, 0)$, $(2\pi/3, 1)$, $(4\pi/3, 1)$ és $(2\pi, 0)$ pontokat! Adjunk felső becslést a $\max_{x\in[0,2\pi]} |p(x) - t(x)|$ értékre!

4. Feladat. (6p) A $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$ pontokhoz tartozó szakaszonként harmadfokú természetes spline-interpolációs függvény meghatározásakor az alappontokbeli deriváltakra az alábbi értékek adódtak: $d_0 = 3/4$, $d_1 = 3/2$, $d_2 = 9/4$! Adjuk meg az interpolációs függvény $[0, 1]$ intervallumon érvényes képletét!

5. Feladat. (3+4p) Számítsuk ki az $\int_{-1}^{1} \sin(x+1)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ integrál közelítését kétféle módon: összetett érintőformulával 3 osztóintervallumot használva, ill. a hárompontos Gauss–Csebisev-formulával (a kvadratúrasúlyok: $\pi/3, \pi/3, \pi/3$)! (Tájékoztatásul: a pontos integrál 2.0228.)

6. Feladat. (5+1+1p) Az $y' = (1 + x)y$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot oldjuk meg az implicit Euler-módszerrel a $[0, 0.4]$ intervallumon. Határozzuk meg a megoldás közelítő értékét a $h = 0.2$ lépéstávolságot használva az $x = 0.4$ pontban, és adjuk meg a közelítés hibáját, ha tudjuk, hogy a pontos megoldás $y(x) = \exp(x + x^2/2)$! Kb. mekkora hibára számíthatnánk, ha a $h = 0.05$ lépéstávolságot használnánk?